Proposition de corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /4 points

Commun à tous les candidats

Dites si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant précisément les réponses :

1. Si A et B sont deux évènements, en notant $p(E)$ la probabilité d'un évènement E, on a :

$$p(A \cup B) = P(A) + p(B)$$

C'est faux ; voici un contre-exemple.
On lance un dé à 6 faces bien équilibré ; on appelle A l'évènement « le numéro sorti est pair » et B l'évènement « le numéro sorti est 2 ».
On a : $p(A) = 0,5$, $p(B) = \frac{1}{6}$, $p(A \cup B) = 0,5$ puisque l'évènement $A \cup B$ est : « le numéro sorti est 2 **OU** est pair », ce qui veut dire que le numéro sorti est 2, ou 4, ou 6, ce qui a une probabilité égale à 0,5 d'arriver.
En remplaçant les valeurs numériques dans la formule proposée, on constate qu'elle est fausse.

2. Avec les mêmes notations que précédemment,

$$p(A \cap B) = P(A) \times p(B)$$

C'est faux ; on utilise la même situation.
On a : $p(A) = 0,5$, $p(B) = \frac{1}{6}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ puisque l'évènement $A \cap B$ est : « le numéro sorti est 2 **ET** est pair », ce qui veut dire que le numéro sorti est 2, ce qui a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ d'arriver.
En remplaçant les valeurs numériques dans la formule proposée, on constate qu'elle est fausse.

3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

C'est vrai. Pour qu'une fraction existe, il faut et il suffit que le dénominateur ne s'annule pas.
Ici, le dénominateur est égale à e^{x^2} ; or, l'exponentielle de n'importe quelle valeur est différente de 0 (autre formulation, la fonction exponentielle ne s'annule jamais).

4. La fonction $g(x) = e^{3x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = (3x+2)e^{3x+2}$.

C'est faux. La fonction $g(x) = e^{3x+2}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée est : $g'(x) = 3e^{3x+2}$.

5. La fonction $h(x) = \sqrt{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

C'est vrai. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car ce qui est sous le radical est strictement positif, pour toute valeur de x.
On utilise la formule : $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = 1 + e^x$, et donc $u'(x) = e^x$. On obtient le résultat proposé.

***Exercice* 2** : /3 points

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n=5,\ p=0,07)$.

   b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

   On a $p(X=2)=\binom{5}{2}0,07^2\times 0,93^3 = 10\times 0,07^2\times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

2. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

   On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.
   La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0}\times 0,07^0\times 0,93^n = 0,93^n$.
   La probabilité qu'un au moins un des n candidats soit recruté est donc égale à $1-0,93^n$.
   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $1-0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n$
   En composant par la fonction ln qui est croissante, on obtient :

   $\ln(0,001) > \ln(0,93^n) \iff \ln(0,001) > n\cdot\ln(0,93)$

   En divisant par $\ln(0,93)$ qui est négatif, l'inégalité change de sens :

   $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} < n$, ce qui donne $n > 95,2$

   Conclusion : il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

Exercice **3** : /4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Lorsque $N = 3$ l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. À la fin de la boucle pour $k = 0$ on a $U = 3$; à la fin de la boucle $k = 1$ on a $U = 10$ et à la fin de la boucle correspondant à $k = 2$ on obtient $U = 29$.
L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

   $u_1 = 3$ et $u_2 = 10$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   - $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
   - Supposons la propriété vraie pour une valeur de n fixée.
     $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n + 1$.
   - Conclusion : d'après la propriété de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, et que pour tout entier n, $u_n \geqslant n$, d'après le théorème de comparaison, on peut conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.
   La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

$u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n = 3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; la suite (u_n) étant croissante, pour tout n tel que $n \geqslant 3p$, alors $u_n \geqslant u_{3p}$ et donc $u_n \geqslant 10^p$ pour tout $n \geqslant 3p$.
n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

$u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc pour la valeur $p = 3$; $n_0 = 7$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que $U < 10^p$
Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Affecter à k la valeur $k + 1$
Fin tant que
Sortie
Afficher k

Exercice **4** : 4 points

Commun à tous les candidats

Les questions suivantes sont indépendantes. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{u}(1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2} ; 1)$ et $\vec{v}(-1 ; 3+2\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2})$ sont-ils colinéaires ?

   On cherche s'il existe un coefficient de proportionnalité entre les coordonnées des deux vecteurs.

   A l'aide de la troisième coordonnée, si ce coefficient existe, il est égal à $1+\sqrt{2}$

   Reste à vérifier pour les deux premières coordonnées :

   D'une part : $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1^2-(\sqrt{2})^2 = 1-2 = -1$

   D'autre part : $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1^2-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = 1-2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}$

   On conclut que **les vecteurs sont colinéaires** : $\vec{v} = (1+\sqrt{2})\vec{u}$

2. Les vecteurs $\vec{u}(1 ; 2 ; 1)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 7)$ et $\vec{w}(7 ; 4 ; 17)$sont-ils coplanaires ?

   On cherche s'il existe une relation du type $a\vec{u}+b\vec{v} = \vec{w}$

   Cette relation s'écrit à l'aide des coordonnées des vecteurs :
   $\left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 7 \\ 2a-b & = & 4 \\ a+7b & = & 17 \end{array}\right.$

   En soustrayant la première ligne à la dernière, on obtient : $5b = 10$ ce qui donne $b = 2$

   En remplaçant b par 2 dans la première ligne, reste à résoudre : $a+4 = 7$ ce qui donne $a = 3$

   Il faut enfin vérifier si la seconde ligne vérifie la relation lorsque $a = 3$ et $b = 2$: c'est le cas puisque $2\times 3-2 = 4$

   On a donc : $3\vec{u}+2\vec{v} = \vec{w}$, ce qui montre que **ces trois vecteurs sont coplanaires**.

3. Démontrer que la droite passant par $M(1 ; 2 ; 0)$ et $N(3 ; 2 ; 1)$ a pour équation paramétrique (de paramètre t) : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2 \\ z & = & t \end{array}\right.$

   $P(x ; y ; z) \in (MN) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{MP} = t\,\overrightarrow{MN}$

   Or, $\overrightarrow{MP} = t\,\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_M \\ y-y_M \\ z-z_M \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ 0\,t \\ 1\,t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x{=}1+2\,t \\ y{=}\ \ 2 \\ z{=}\ \ \ t \end{array}\right.$

4. Soient (d_1) et (d_2) les droites d'équations paramétriques (de paramètres t et t') :

   $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2 \\ z & = & t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+3t' \\ y & = & t' \\ z & = & 1 \end{array}\right.$

   a. Sont-elles parallèles ?
   Un vecteur directeur de (d_1) est : $\vec{d_1}(2 ; 0 ; 1)$; pour (d_2), on a $\vec{d_2}(3 ; 1 ; 0)$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (pas de coefficient multiplicateur permettant de passer de l'un à l'autre) ; on conclut que **les deux droites ne sont pas parallèles**.

b. Sont-elles sécantes ?

Pour cela, on cherche à résoudre le système : $\left\{\begin{array}{lcl} 1+2t & = & 2+3t' \\ 2 & = & t' \\ t & = & 1 \end{array}\right.$

Les deuxième et troisième ligne donnent directement : $t=1$ et $t'=2$; reste à voir si le système est compatible, c'est-à-dire si la première ligne est vérifiée pour ces valeurs de t et t' :

$1+2\times 1=3$ et $2+3\times 2=8$; il n'y a pas égalité, ce qui montre que ce système n'a pas de solution.

On conclut que les deux droites n'ont pas de point d'intersection : **elles ne sont pas sécantes**.

***Exercice* 5** : /2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).

$(-i)^3 + (-8+i)i^2 + (17-8i)(-i) + 17i = +i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$

$-i$ est bien solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

On développe le second membre de l'égalité proposée :
$(z+i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+ib)z + ci$

En identifiant les coefficients du polynôme, on obtient :

$a = 1$, $b + ia = -8 + i$, $c + ib = 17 - 8i$ et $ic = 17i$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ; on obtient alors :

$a = 1$, $b = -8$, $c = 17$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

(E) s'écrit : $(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

Un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul ; ce qui donne ici $z + i = 0$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$

Cette deuxième équation est une équation à coefficients réels dont on sait déterminer les racines (éventuellement complexes) :

$\Delta = 8^2 - 4 \times 17 = -4 = (2i)^2$

Il y a deux racines complexes conjuguées : $z_1 = 4 + i$, et $z_2 = 4 - i$

Ainsi, (E) a trois solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 4 - i$ et $z_3 = -i$

Exercice **6** : /2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on conclut que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

$f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
On a donc $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle). On peut donc en déduire que f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1}~;~+\infty\right[$.
De même $f'(x) < 0 \iff x < \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
On a $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1$. On a donc le tableau de variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$ suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0~;~+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

Sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{-1}\right[$, $f(x) \leqslant -1 < 0$. l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}~;~+\infty\right[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement monotone croissante : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il y a une seule solution à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle, puisque $f\left(e^{-1}\right) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$.
Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}~;~+\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne successivement : $1,7 < \alpha < 1,8$, puis $1,76 < \alpha < 1,77$.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0~;~+\infty[$.

La question précédente montre que :
- sur $]0~;~\alpha[$, $f(x) < 0$;
- $f(\alpha) = 0$;
- sur $]\alpha~;~+\infty[$, $f(x) > 0$.

5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

On a $f(\alpha) = 0 \iff \alpha\ln\alpha - 1 = 0 \iff \alpha\ln\alpha = 1 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ (car $\alpha \neq 0$).

Exercice 7 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au+bv=1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

   Soient a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$.
   En multipliant par c, on obtient $auc+bcv=c$.
   On suppose que a divise bc ; alors a divise bcv et comme a divise auc, a divise la somme $auc+bcv$, donc a divise c.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

   Soit a relatif tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$.
   Alors, il existe k et k' relatifs tels que $a = kp$ et $a = k'q$ d'où $kp = k'q$.
   p divise $k'q$ et p est premier avec q, donc, d'après le théorème de Gauss, p divise k'. Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$, $k' = pk''$.
   Alors $a = k'q = k''pq$ d'où $a \equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
   On désigne par $(u\,;\,v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.
   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;\,v)$.

   17 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $17u+5v=1$.

   b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

   Soit $(u\,;\,v)$ un couple solution, donc $17u+5v=1$. On en déduit que $17u \equiv 1\ [5]$ et $5v \equiv 1\ [17]$.
   Alors $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v \equiv 9 \times 5v\ [17] \equiv 9 \times 1\ [17] \equiv 9\ [17]$.
   De même : $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v \equiv 3 \times 17u\ [5] \equiv 3 \times 1\ [5] \equiv 3\ [5]$.
   Par conséquent, $n_0 \in \mathcal{S}$.

   c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

   Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   $17 = 3 \times 5+2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$, d'où $1 = 5 - 2 \times 2$
   $= 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2 = 17 \times (-2) + 5 \times 7$.
   On peut prendre $(u\,;\,v) = (-2\,;\,7)$.
   On obtient alors $n_0 = 213$ (ce n'est évidemment pas la seule valeur !)

2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.

a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.

$n \equiv 9$ [17] et $n_0 \equiv 9$ [17] donc $n - n_0 \equiv 0$ [17].
De même, $n \equiv 3$ [5] et $n_0 \equiv 3$ [5] donc $n - n_0 \equiv 0$ [5].
17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après la partie A, $n - n_0 \equiv 0$ [85] (car $5 \times 17 = 85$).

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

On en déduit que, si $n \in \mathscr{S}$, $n \equiv n_0$ [85] donc $n \equiv 213$ [85].
Or $213 = 170 + 43 = 2 \times 85 + 43 \equiv 43$ [85] donc $213 \equiv 43$ [85].
Par conséquent : $n \in \mathscr{S} \iff n \equiv 43$ [85] donc $n = 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $n \equiv 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$, il est clair que $n \equiv 9$ [17] et $n \equiv 3$ [5].

3. Application :
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

Soit n le nombre de jetons. On a : $n \equiv 9$ [17] et $n \equiv 3$ [5].
D'après ce qui précède, on a : $n = 43 + 85k$.
On sait que $300 \leqslant n \leqslant 400$, donc $300 \leqslant 43 + 85k \leqslant 400$. On en déduit que $k = 4$ et que Zoé a 383 jetons.