

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Exercice 1 :

/4 points

Commun à tous les candidats

Dites si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant précisément les réponses :

1. Si A et B sont deux évènements, en notant $p(E)$ la probabilité d'un évènement E , on a :

$$p(A \cup B) = P(A) + p(B)$$

2. Avec les mêmes notations que précédemment,

$$p(A \cap B) = P(A) \times p(B)$$

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction $g(x) = e^{3x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = (3x+2)e^{3x+2}$.

5. La fonction $h(x) = \sqrt{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.
-

Exercice 2 :

/3 points

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les uns des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

- b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3} .

2. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N .

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul N .
Traitement Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N - 1$ Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$ Fin pour
Sortie Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
 2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.
 5. Soit p un entier naturel non nul.
 - a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .
 - b. Justifier que $n_0 \leq 3p$.
 - c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
 - d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.
-

Exercice 4 :

4 points

Commun à tous les candidats

Les questions suivantes sont indépendantes. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{u}(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}; 1)$ et $\vec{v}(-1; 3 + 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ sont-ils colinéaires?
 2. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 1)$, $\vec{v}(2; -1; 7)$ et $\vec{w}(7; 4; 17)$ sont-ils coplanaires?
 3. Démontrer que la droite passant par $M(1; 2; 0)$ et $N(3; 2; 1)$ a pour équation paramétrique (de paramètre t) :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$
 4. Soient (d_1) et (d_2) les droites d'équations paramétriques (de paramètres t et t') :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + 3t' \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases}$$
 - a. Sont-elles parallèles?
 - b. Sont-elles sécantes?
-

Exercice 5 :

/2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

1. Montrer que $-i$ est solution de (E) .
2. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
-

Exercice 6 :

/2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln x - 1.$$

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2} .
 4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0; +\infty[$.
-

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \pmod{p}$ et $a \equiv 0 \pmod{q}$, alors $a \equiv 0 \pmod{pq}$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
 - a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u ; v)$.
 - b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.
 - c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.
 - a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.
 - b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?