durée : 3 h 30 **calculatrice autorisée**

Proposition de corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /7 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $I = [0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout réel x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $f'(x) = \dfrac{3(x+4)-1(3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	1

D'après ce tableau, on constate que $f([0\,;\,1]) = \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right] \subset [0\,;\,1]$, autrement dit que pour tout élément $x \in I$, $f(x) \in I$.

2. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à I.

Démontrons par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n \in I$

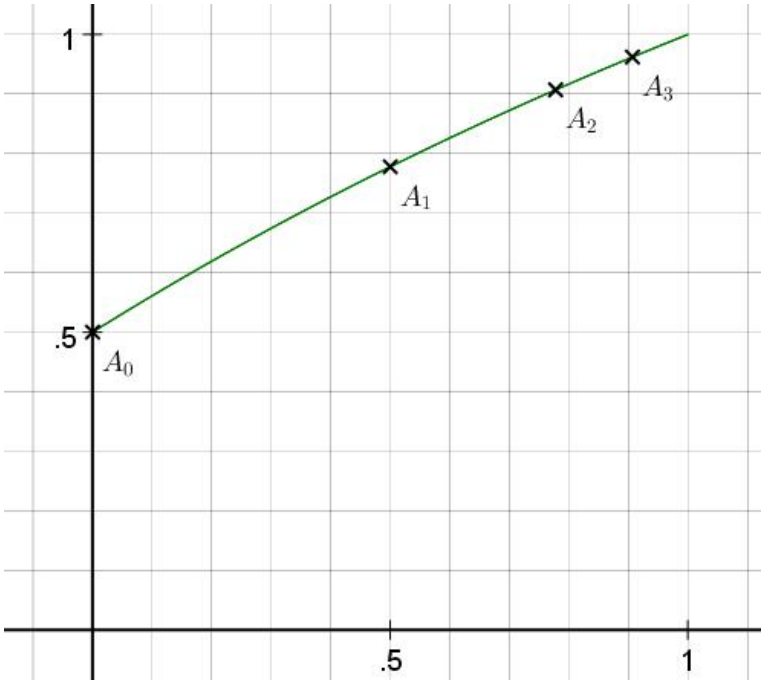
Initialisation : pour $n = 0$, la propriété est vraie puisque $u_0 = 0 \in I$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; supposons que $u_n \in I$.

D'après la question précédente, on a alors : $f(u_n) \in I$, autrement dit $u_{n+1} \in I$: la propriété est bien héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

3. **a.** Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm.



b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
Que suggère le graphique concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

La suite semble être croissante et converger vers 1.

c. Établir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \dfrac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$

Or, $\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4} = \dfrac{u_n+2-u_n^2-2u_n}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$

On a bien l'égalité demandée.

Comme $u_n \in [0\,;1]$, on a : $1-u_n \geqslant 0$, $u_n+2 \geqslant 0$ et $u_n+4 \geqslant 0$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4} \geqslant 0$: la suite est croissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

La suite (u_n) est croissante (question précédente), majorée par 1 (question 2) : elle est donc convergente. On note l sa limite.

$u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$ tend aussi vers l ; l vérifie donc la relation : $l = \dfrac{3l+2}{l+4}$

Cette relation donne : $l^2+4l = 3l+2$, soit $l^2+l-2=0$

On résout cette équation du second degré : $\Delta = 1^2 - 4\times(-2) = 9$ et donc $l = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ ou $l = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Comme $l \in [0\,;1]$, on conclut que $l = 1$.

La suite (u_n) est convergente vers 1.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4} \times \frac{u_n+4}{3u_n+2+2u_n+8} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}$$

Ainsi, $v_{n+1} = \dfrac{2}{5} v_n$: (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$v_n = v_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

c. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ et donc $v_n \times u_n + 2v_n = u_n - 1$, ce qui donne $u_n(1 - v_n) = 2v_n + 1$

Ainsi, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ (pour faire les choses plus rigoureusement, il faudrait démontrer que pour tout n, $v_n \neq 1$ …)

Et finalement : $u_n = \dfrac{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et la valeur de sa limite.

Comme $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ converge vers 0, on déduit des théorèmes généraux sur les limites que la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2 : /3 points

Commun à tous les candidats

On considère une fonction inconnue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$, où a, b et c désignent des nombres réels non nuls.

On donne : $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ et $f''(0) = -1$,

remarque : f'' désigne la fonction dérivée de f'. On l'appelle dérivée seconde ; autrement dit, on l'obtient en dérivant deux fois de suite la fonction f.

1. Déterminer les réels a, b et c.

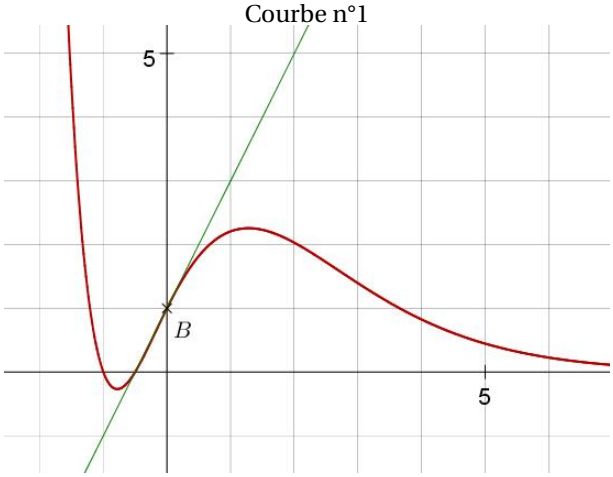
Comme $f(0) = 1$, cela donne : $c = 1$.

Pour exprimer $f'(0)$, il faut dériver f : $f'(x) = (2ax + b)\,e^{-x} - \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$
Et donc : $f'(0) = b - c = 2$, ce qui donne $b = 3$

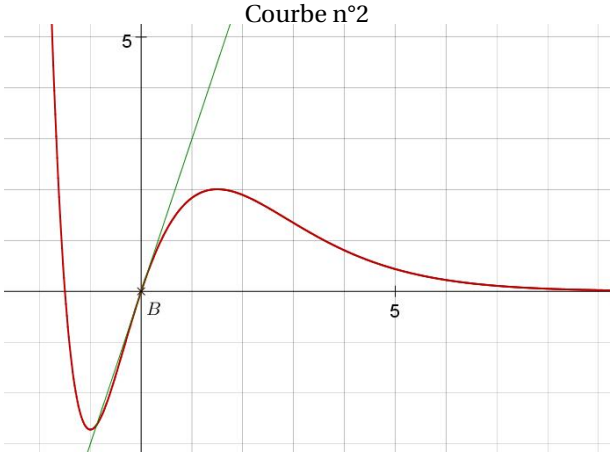
Pour exprimer $f''(0)$, il faut dériver f' : $f''(x) = 2ae^{-x} - 2\,(2ax + b)\,e^{-x} + \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$
Et donc : $f''(0) = 2a - 2b + c = -1$, ce qui donne $a = 2$

2. Parmi les trois courbes suivantes, une seule est la représentation graphique de f. Préciser laquelle en expliquant.

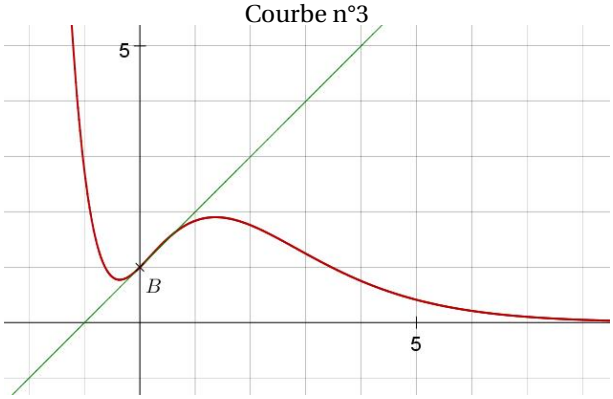
Courbe n°1



Courbe n°2



Courbe n°3



Comme $f(0) = 1$, le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe : cela exclut la courbe n°2.

Comme $f'(0) = 2$, la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 2, ce qui exclut la courbe n°3 dont la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1.

La courbe qui représente la fonction f est **la courbe n°1**.

***Exercice* 3** : /2 points

Commun à tous les candidats

Une association est composée de 30 personnes. Pour chacune de ces personnes, la probabilité qu'elle assiste à la prochaine réunion est égale à $\frac{1}{2}$.

Quelle est la probabilité que plus des deux tiers des membres de cette association assistent à cette réunion ?

On note N la variable aléatoire comptant le nombre de personnes venant à la prochaine réunion. Cette variable suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{1}{2}$; en effet, on peut modéliser la situation comme 30 tirages au sort successifs avec une probabilité de réussite (la personne vient) égale à $\frac{1}{2}$.

On se demande donc quelle est la probabilité que $N \geqslant 20$ (20 représente les deux tiers de 30) ; on peut aussi interpréter la consigne comme $N > 20$ (les deux réponses sont considérées comme correctes).

Or, $p(N \geqslant 20) = 1 - p(N < 20) = 1 - p(N \leqslant 19)$; et $p(N \leqslant 19)$ se calcule à la calculatrice : $p(N \leqslant 19) \approx 0,951$

Finalement, $p(N \geqslant 20) \approx 0,049 = 4,9\%$

***Exercice* 4** : /3 points

Commun à tous les candidats

Une suite convergente est-elle majorée ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.

Oui ; en voici une démonstration.

Notons l la limite de cette suite (l est un réel quelconque).

Dire que la suite (u_n) converge vers l, c'est dire qu'à partir d'un certain rang, toutes les valeurs sont « près » de l. Choisissons l'intervalle $[l-1; l+1]$; à partir du rang N, toutes les valeurs de la suite se trouvent dans cet intervalle.

Les valeurs prises par la suite, entre le rang 0 et la rang N ont un plus grand élément ; on le note M_1.

Notons $M_2 = l + 1$.

Ainsi, pour $n \leqslant N$, $u_n \leqslant M_1$;

et pour $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M_2$

En notant M le maximum de M_1 et M_2, on a trouvé un majorant de la suite (u_n). Cela montre que la suite est majorée.

remarque : on montrerait de la même manière que la suite est minorée et donc que, plus généralement, toute suite convergente est **bornée**.

***Exercice* 5** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,9[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$.

C'est **faux** : la fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est dérivable partout où ce qui est sous la racine est strictement positif, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;\,9[$.

Mais quand on détermine sa dérivée : $\left(\sqrt{9-x}\right)' = \dfrac{-1}{2\sqrt{9-x}}$, on n'a pas le résultat proposé.

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(10-x)^4}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{4}{(10-x)^5}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.

C'est **vrai** : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(10-x)^4}$ est définie et dérivable partout où son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.

On détermine sa dérivée : $\left((10-x)^{-4}\right)' = -4 \times (10-x)^{-4-1} \times (-1) = 4(10-x)^{-5} = \dfrac{4}{(10-x)^5}$

3. La suite $u_n = \dfrac{3^n+2}{4^n-1}$ (définie pour n entier naturel différent de 0) a pour limite 0.

C'est **vrai** : $u_n = \dfrac{3^n+2}{4^n-1} = \dfrac{3^n\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)}{4^n\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \dfrac{1+\dfrac{2}{3^n}}{1-\dfrac{1}{4^n}}$

Or, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ est une suite géométrique dont la raison est comprise (strictement) entre -1 et 1 : elle converge vers 0.

3^n diverge vers $+\infty$ (suite géométrique de raison strictement supérieure à 1) : par quotient, $\dfrac{2}{3^n}$ converge vers 0 et donc (par somme), $1+\dfrac{2}{3^n}$ converge vers 1.

De la même manière, $1-\dfrac{1}{4^n}$ converge vers 1.

Par produit et quotient, la suite (u_n) converge vers $0 \times \dfrac{1}{1}$ c'est-à-dire 0.

4. Si une fonction n'est pas paire, alors elle est impaire.

C'est **faux** : la fonction $f(x) = x+1$ n'est ni paire, ni impaire !

***Exercice* 6** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée (ou paramètre) :	n un entier naturel.
Variables :	i entier naturel. v un réel.
Traitement :	Affecter à v la valeur 0. Pour i variant de 0 à n $\quad$ Affecter à v la valeur $v+\dfrac{(-3)^{-i}}{2i+1}$ Fin de Pour
Sortie (ou résultat) :	v.

a. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 2$? On en donnera la valeur exacte.

Construisons le tableau suivant reprenant les valeurs des variables apparaissant dans l'algorithme :

i	v
0	$0+\dfrac{(-3)^0}{2\times 0+1}=1$
1	$1+\dfrac{(-3)^{-1}}{2\times 1+1}=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$
2	$\dfrac{8}{9}+\dfrac{(-3)^{-2}}{2\times 2+1}=\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{3^2\times 5}=\dfrac{40}{45}+\dfrac{1}{45}=\dfrac{41}{45}$

Et donc, le nombre en sortie pour $n=2$ est $\dfrac{41}{45}$.

b. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme pour n quelconque ($n \geqslant 1$) ?

On aura : $\dfrac{(-3)^0}{2\times 0+1}+\dfrac{(-3)^{-1}}{2\times 1+1}+\dfrac{(-3)^{-2}}{2\times 2+1}+\ldots+\dfrac{(-3)^{-n}}{2\times n+1}=1-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{45}+\ldots+\dfrac{(-3)^{-n}}{2\times n+1}$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par :

$u_n=\sqrt{12}\times\left(1+\dfrac{(-3)^{-1}}{2\times 1+1}+\dfrac{(-3)^{-2}}{2\times 2+1}+\ldots+\dfrac{(-3)^{-n}}{2\times n+1}\right)=\sqrt{12}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-3)^{-k}}{2\times k+1}$

Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il retourne le terme u_n lorsqu'on entre l'entier n.

Entrée (ou paramètre) :	n un entier naturel.
Variables :	i entier naturel. v un réel.
Traitement :	Affecter à v la valeur 0. Pour i variant de 0 à n $\quad$ Affecter à v la valeur $v+\sqrt{12}\times\dfrac{(-3)^{-i}}{2i+1}$ Fin de Pour
Sortie (ou résultat) :	v.

3. La mise en oeuvre de l'algorithme modifié sur une « machine » a donné ces résultats, arrondis à 10^{-4}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	3,1426	3,1413	3,1417	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416

– À l'aide de ce tableau et de la définition de la suite (u_n), formuler une conjecture sur les variations de la suite.

La suite diminue entre u_0 et u_1, puis augmente, puis diminue … ce qui est normal dans la mesure ou on ajoute alternativement un nombre positif et un nombre négatif : cette suite n'est pas monotone.

– A l'aide de ce tableau, formuler une conjecture sur l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

Cette suite semble converger vers quelque chose qui ressemble à 3,1416 ; on reconnaît le nombre π a priori !

S'il vous reste du temps, vous pouvez « faire tourner » cet algorithme sur votre calculatrice et donner avec plus de précision la valeur de sortie de cet algorithme ; vous aurez sans doute reconnu un nombre célèbre …

Exercice 7 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Partie A

1) On teste la congruence de 1 02 01 38 446 713 modulo 97, qui donne 22, pour une clé à 75 qui ne correspond pas.

   On effectue le même test avec 2 02 01 38 446 713, qui donne 72, pour une clé 97-72 = 25. Dominique est une femme.

2) Traitement : Reste = n - $E\left(\frac{n}{d}\right)\times d$

3) Il affiche les chiffres composant le nombre en partant des unités : 9 2 5 7 1

4)

```
Entrée : N
Afficher 97-Reste(N ; 97)        (avant que N soit modifié)
Tant que N⩾1
    Reste (N ; 10)→c
    (N−c)÷10→N
    Afficher c et aller à la ligne
Fin Tant Que
Si (c = 1) alors afficher (" Homme ") sinon afficher (" Femme ").
Fin Algorithme
```

Partie B

1) Par exemple :

X	Y1
1	5
2	13
3	35
4	97
5	275
6	793
7	2315

X	Y1
7	2315
8	6817
9	20195
10	60073
11	179195
12	535537
13	1.6E6

Le chiffre des unités semble être :
5 si n est impair
7 si n est multiple de 4
3 sinon (pair mais pas divisible par 4)

2) 2^n est pair comme produit de nombres pairs. 3^n est impair comme produit de nombres impairs. La somme des deux est par conséquent impaire.

3a) $2^n+3^n=2^{4q+r}+3^{4q+r}=(2^4)^q\times 2^r+(3^4)^q\times 3^r$

or $2^4=16\equiv 1\,[5]$ et $3^4=81\equiv 1\,[5]$,

donc $2^n+3^n\equiv 1^q\times 2^r+1^q\times 3^r\equiv 2^r+3^r\,[5]$.

b) Tableau des congruences modulo 5

r	2^r+3^r et 2^n+3^n
0	$1+1\equiv 2$
1	$2+3\equiv 5\equiv 0\,[5]$
2	$4+9\equiv 13\equiv 3\,[5]$
3	$8+27\equiv 35\equiv 0\,[5]$

c) Chiffre des unités possibles

2^n+3^n
2 ou 7
0 ou 5
3 ou 8
0 ou 5

4) Puisque 2^n+3^n est impair d'après 2), on peut éliminer dans le 3c) les chiffres des unités pairs. On obtient la confirmation de notre conjecture.