Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /2 points

Restitution organisée de connaissances
Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous une proposition.

Proposition : « Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$. »

Démontrer cette proposition.

Démontrons cette propriété par récurrence : pour n entier strictement supérieur à 1, on pose : $P(n)$: « $(x^n)' = nx^{n-1}$

initialisation : pour $n = 2$: $(x^2)' = 2x$; la propriété est vérifiée.

hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montré que $P(n+1)$ est alors vraie.

$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n \times x)' = (x^n)' \times x + x^n \times 1$ en appliquant la formule du produit d'une dérivée.

Cela donne alors, en appliquant la propriété $P(n)$: $\left(x^{n+1}\right)' = nx^{n-1} \times x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$; cette dernière relation veut exactement dire que $P(n+1)$ est vraie ; la propriété est héréditaire.

conclusion : $P(2)$ est vraie et : pour $n > 1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ; cela montre que pour tout nombre entier strictement supérieur à 1, $P(n)$ est vraie.

***Exercice* 2** : /4 points

Cet exercice comporte plusieurs questions indépendantes, auxquelles il faudra répondre par Vrai ou Faux, **en justifiant**. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On lance 60 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 (ce dé est non truqué).
   a. La probabilité de tomber dix fois sur le numéro 6 est égale à 0,5.

   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de numéros 6 sortis. X suit une loi binomiale de paramètres $p = 16$ et $n = 60$.

   La probabilité cherchée est égale à $P(X = 10)$; cela donne à la calculatrice environ 0,137. Le résultat proposé est **FAUX**.

   b. La probabilité de tomber au moins dix fois sur le numéro 6 est égale à 0,5.

   La probabilité cherchée est égale à $P(X \geqslant 10)$; on fait évoluer cette écriture :
   $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0,446 \approx 0,553$. Le résultat proposé est **FAUX**.

2. Voici la répartition des garçons et des filles dans un lycée.

	Seconde	Première	Terminale
Filles	67	38	53
Garçons	46	44	37

Les événements « être une fille » et « être en Terminale » sont indépendants.

On note F l'événement « être une fille » et T l'événement « être en Terminale ».

On a d'après le tableau : $P(F) = \dfrac{67+38+53}{67+38+53+46+44+37} = \dfrac{158}{285}$

Et : $P_T(F) = \dfrac{53}{53+37} = \dfrac{53}{90}$

Or, $\dfrac{158}{285} \neq \dfrac{53}{90}$: cela signifie que les deux événements ne sont pas indépendants ; la proposition est **FAUSSE**.

3. **a.** $\lim \dfrac{1-5n^2}{n^2+8n-2} = -5$

Un calcul direct aboutit à une forme indéterminée ; on factorise numérateur et dénominateur par n^2 :

$$\frac{1-5n^2}{n^2+8n-2} = \frac{n^2(\frac{1}{n^2}-5)}{n^2(1+\frac{8}{n}-\frac{2}{n^2})} = \frac{\frac{1}{n^2}-5}{1+\frac{8}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

Le numérateur tend vers -5 et le dénominateur tend vers 1 ; par quotient la limite est égale à -5 : la proposition est **VRAIE**.

b. $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{n} = 1$

Un calcul direct aboutit à une forme indéterminée ; on factorise numérateur par n :

$$\frac{n+(-1)^n}{n} = \frac{n(1+\frac{(-1)^n}{n})}{n} = 1+\frac{(-1)^n}{n}$$

Or, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout nombre entier n non nul.

Les suites $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ convergent vers 0 ; par le théorème d'encadrement, on conclut que la suite $\frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

Par somme, on conclut que la suite $1+\frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1 : la proposition est **VRAIE**.

4. **a.** la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ (définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$) est dérivable sur son ensemble de définition et : $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

On dérive un quotient ; la fonction est dérivable là où elle est définie, c'est-à-dire partout où son dénominateur est non nul, soit sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

On utilise la formule du quotient et on obtient : $f'(x) = \dfrac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^2}$; la proposition est donc **FAUSSE**.

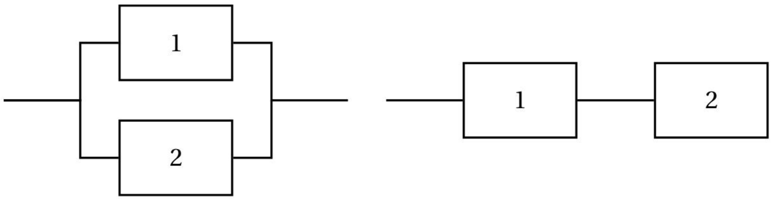
b. la fonction $g(x) = x \cdot e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $g'(x) = e^x + x \cdot e^x$

On dérive un produit de fonctions dérivalbes sur $\mathbb{R}$; la fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule de dérivation d'un produit et obtient : $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x \cdot e^x$; la proposition est donc **VRAIE**.

***Exercice* 3** : /4 points

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

   Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
   $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

   Ici la probabilité est égale à :
   $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279$.

Partie B

Pour déterminer si un composant est défectueux ou pas, on effectue un test.

Un composant étant choisi au hasard, on appelle :
- M l'évènement « le composant est défectueux » ;
- T l'évènement « le composant a un test révélant un problème ».

On admet que :
- 82 % des composants défectueux étudiés ont un test révélant un problème ;
- 73 % des composants non défectueux ont un test ne révélant pas de problème.

On sait de plus que 10 % des composants étudiés sont défectueux.

1. Démontrer que la probabilité qu'un composant ait un test révélant un problème est de 0,325.

   D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = P(M) \cdot P_M(T) + P(\overline{M}) \cdot P_{\overline{M}}(T) = 0,1 \cdot 0,82 + 0,9 \cdot 0,27 = 0,325$

2. Calculer $P_{\overline{T}}(M)$. Interpréter ce résultat.

   $$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0,1 \cdot 0,18}{1 - 0,325} \approx 0,027$$

   Cela signifie qu'il y a très peu de risque qu'un appareil ayant eu un test ne révélant pas de problème ait un défaut : on peut donc laisser partir des composants ayant passé le test avec succès sans trop de risque.

3. Un composant a un test révélant un problème. Le technicien qui a fait le test se dit qu'en fait, ce composant n'a qu'une chance sur quatre d'avoir réellement un défaut. Qu'en pensez- vous ?

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,1 \cdot 0,82}{0,325} \approx 0,25$$

Le technicien a raison ; il vaudrait mieux faire d'autres tests avant de jeter ce composant.

***Exercice* 4** : /5 points

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a. En utilisant les données de l'énoncé, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique, donc pour tout n, $u_n = u_0 \times r^n = 10 \times 0,8^n$.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \dfrac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.
On résout l'inéquation :

$$u_n < 0,1 \iff 10 \times 0,8^n < 0,1$$
$$\iff 0,8^n < 0,01$$

En effectuant des essais à la calculatrice, on observe que $0,8^{20} > 0,01$ et que $0,8^{21} < 0,01$; on conclut donc que c'est après 21 minutes que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.
On peut aussi le constater en calculant, à la calculatrice : $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 30
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v \leqslant 6$ alors affecter à v la valeur $v+2$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

3. On programme la machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.
On peut donc dire que, pour tout n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8(z_n + 5) - 4 = 0,8z_n + 4 - 4 = 0,8z_n$
$z_0 = w_0 - 5$; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$.
La suite (z_n) est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0,8$.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout n :
$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$.
Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout n, $w_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

La suite (z_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (w_n) est convergente vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite (w_n) est convergente et a pour limite 5.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

***Exercice* 5** : /2 points

On considère une fonction inconnue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$, où a, b et c désignent des nombres réels non nuls.

On donne : $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ et $f''(0) = -1$,

remarque : f'' désigne la fonction dérivée de f'. On l'appelle dérivée seconde ; autrement dit, on l'obtient en dérivant deux fois de suite la fonction f.

1. Déterminer les réels a, b et c.

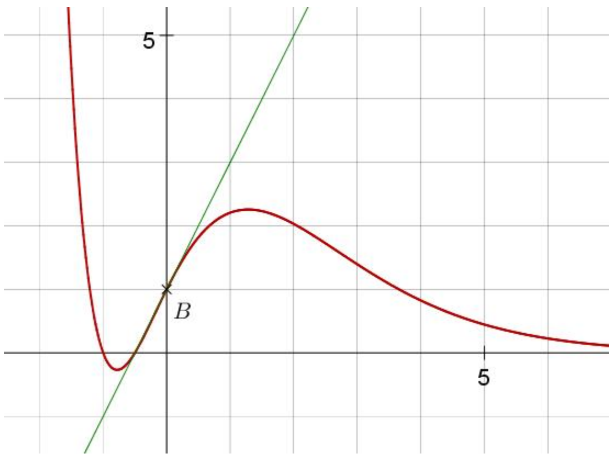
Comme $f(0) = 1$, cela donne : $c = 1$.

Pour exprimer $f'(0)$, il faut dériver f : $f'(x) = (2ax + b)\,e^{-x} - \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$
Et donc : $f'(0) = b - c = 2$, ce qui donne $b = 3$

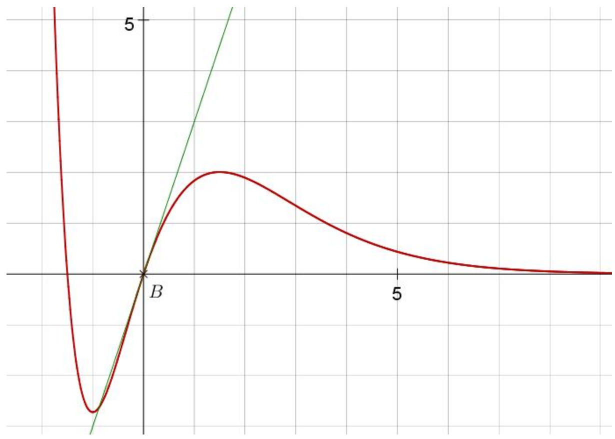
Pour exprimer $f''(0)$, il faut dériver f' : $f''(x) = 2ae^{-x} - 2\,(2ax + b)\,e^{-x} + \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$
Et donc : $f''(0) = 2a - 2b + c = -1$, ce qui donne $a = 2$

2. Parmi les trois courbes suivantes, une seule est la représentation graphique de f. Préciser laquelle en expliquant.

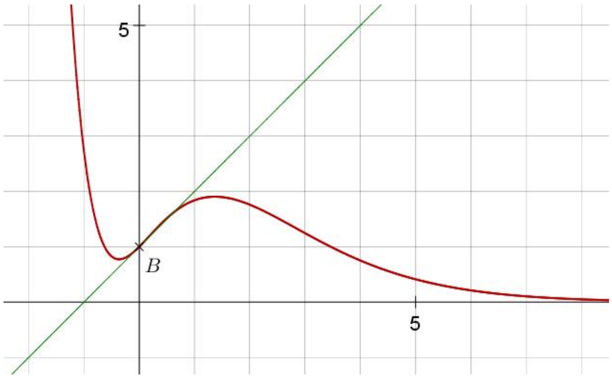
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Comme $f(0) = 1$, le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe : cela exclut la courbe 2.

Comme $f'(0) = 2$, la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 2, ce qui exclut la courbe 3 dont la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1.

La courbe qui représente la fonction f est **la courbe 1**.

***Exercice* 6** : /3 points

Une suite convergente est-elle majorée ?

remarque : une suite (u_n) est dite majorée, s'il existe une valeur reélle qui ne sera jamais dépassée par les valeurs prises par les éléments de la suite. Autrement dit : il existe M tel que pour tout entier n, $u_n \leqslant M$

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.

Oui ; en voici une démonstration.

Notons l la limite de cette suite (l est un réel quelconque).

Dire que la suite (u_n) converge vers l, c'est dire qu'à partir d'un certain rang, toutes les valeurs sont « près » de l. Choisissons l'intervalle $[l-1\,;\,l+1]$; à partir du rang N, toutes les valeurs de la suite se trouvent dans cet intervalle.

Les valeurs prises par la suite, entre le rang 0 et la rang N ont un plus grand élément ; on le note M_1.

Notons $M_2 = l + 1$.

Ainsi, pour $n \leqslant N$, $u_n \leqslant M_1$;

et pour $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M_2$

En notant M le maximum de M_1 et M_2, on a trouvé un majorant de la suite (u_n). Cela montre que la suite est majorée.

remarque : on montrerait de la même manière que la suite est minorée et donc que, plus généralement, toute suite convergente est **bornée**.
