durée : 3 h 30 **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /7 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $I = [0 ; 1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout réel x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à I.
3. **a.** Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm.

   b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

   c. Établir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

   a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

   c. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et la valeur de sa limite.

***Exercice* 2** : /4 points

Commun à tous les candidats

On considère une fonction inconnue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$, où a, b et c désignent des nombres réels non nuls.

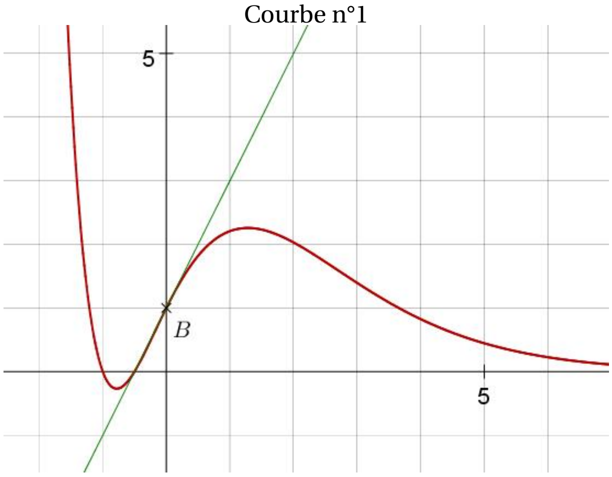
On donne : $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ et $f''(0) = -1$,

remarque : f'' désigne la fonction dérivée de f'. On l'appelle dérivée seconde ; autrement dit, on l'obtient en dérivant deux fois de suite la fonction f.

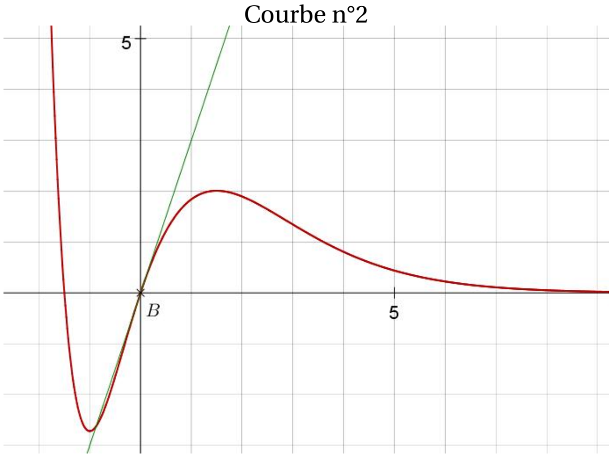
1. Déterminer les réels a, b et c.

2. Parmi les trois courbes suivantes, une seule est la représentation graphique de f. Préciser laquelle en expliquant.

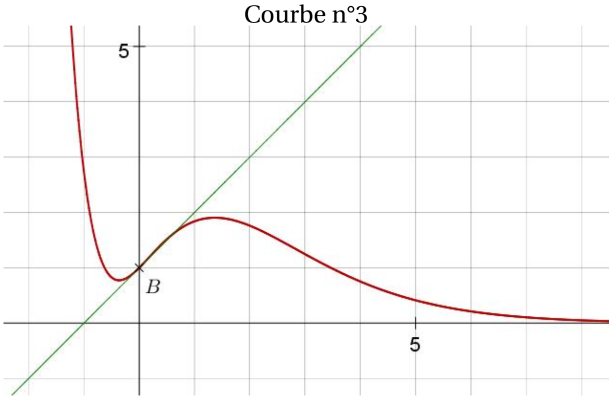
Courbe n°1



Courbe n°2



Courbe n°3



***Exercice* 3** : /2 points

Commun à tous les candidats

Une association est composée de 30 personnes. Pour chacune de ces personnes, la probabilité qu'elle assiste à la prochaine réunion est égale à $\frac{1}{2}$.

Quelle est la probabilité que plus des deux tiers des membres de cette association assistent à cette réunion ?

***Exercice* 4** : /2 points

Commun à tous les candidats

Une suite convergente est-elle majorée ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.

***Exercice* 5** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,9[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x}}$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(10-x)^4}$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{4}{(10-x)^5}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.
3. La suite $u_n = \frac{3^n+2}{4^n-1}$ (définie pour n entier naturel différent de 0) a pour limite 0.
4. Si une fonction n'est pas paire, alors elle est impaire.

***Exercice* 6** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée (ou paramètre) :	n un entier naturel.
Variables :	i entier naturel. v un réel.
Traitement :	Affecter à v la valeur 0. Pour i variant de 0 à n Affecter à v la valeur $v + \frac{(-3)^{-i}}{2i+1}$ Fin de Pour
Sortie (ou résultat) :	v.

   a. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 2$? On en donnera la valeur exacte.

b. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme pour n quelconque ($n \geqslant 1$) ?

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par :

$$u_n = \sqrt{12} \times \left(1 + \frac{(-3)^{-1}}{2\times 1+1} + \frac{(-3)^{-2}}{2\times 2+1} + \ldots + \frac{(-3)^{-n}}{2\times n+1}\right) = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^{-k}}{2\times k+1}$$

Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il retourne le terme u_n lorsqu'on entre l'entier n.

3. La mise en oeuvre de l'algorithme modifié sur une « machine » a donné ces résultats, arrondis à 10^{-4}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	3,1426	3,1413	3,1417	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416

– À l'aide de ce tableau et de la définition de la suite (u_n), formuler une conjecture sur les variations de la suite.

– A l'aide de ce tableau, formuler une conjecture sur l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

S'il vous reste du temps, vous pouvez « faire tourner » cet algorithme sur votre calculatrice et donner avec plus de précision la valeur de sortie de cet algorithme ; vous aurez sans doute reconnu un nombre célèbre ...

***Exercice* 7** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Chaque citoyen français possède un numéro INSEE (noté N dans cet exercice) composé de 13 chiffres. Le premier chiffre est 1 pour un homme, 2 pour une femme.
Exemple : 1 74 09 59 599 141 est le numéro d'un homme.

Les questions peuvent être traitées indépendamment

1) Chaque numéro Insee est complété par un nombre à deux chiffres appelé clé.
La clé se calcule comme suit : 97 moins le reste dans la division de N par 97.
Exemple : la clé de 1 74 09 59 599 141 est 44.

Sur le numéro INSEE de Dominique ci-dessous, le premier chiffre a été effacé
X 02 01 38 446 713. Clé : 25.

Dominique est-il un homme ou est-elle une femme ?

2) On considère une calculatrice programmable qui dispose de la fonction partie entière d'un nombre réel, notée E(x). Elle ne dispose pas de fonction sur la division euclidienne ni sur le modulo.

Recopier et compléter le traitement de l'algorithme ci-contre pour qu'il calcule le reste de la division euclidienne de n par d.

```
Fonction Reste (n ; d)
    Traitement : Reste = (à compléter)
Fin de la fonction Reste.
```

3) La fonction Reste(n ; d) a été programmée au 2) : on peut dorénavant l'utiliser.
Qu'affiche exactement l'algorithme ci-dessous si l'on rentre 17529 pour N ?
(Il n'est pas indispensable de le programmer sur votre calculatrice)

```
Algorithme A
    Entrée : N
    Tant que  N⩾1
        Reste (N ; 10)→c
        (N−c)÷10→N
        Afficher c
    Fin Tant Que
Fin algorithme
```

4) On considère que l'utilisateur ne rentre que des numéros Insee à 13 chiffres.
Recopier et modifier l'algorithme du 2) pour qu'il affiche en sortie deux informations :

1. La clé associée au numéro
2. “ Homme ” ou “ Femme ”

Partie B

On cherche dans cet exercice à déterminer le chiffre des unités de 2^n+3^n selon les valeurs de n ($n\in\mathbb{N}$).

1) Afficher sur votre calculatrice les 12 premières valeurs de 2^n+3^n et formuler une conjecture sur le chiffre des unités en fonction de n.

2) Déterminer la parité de 2^n+3^n .

3) On nomme q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par 4, de sorte que $n=4q+r$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^n+3^n\equiv 2^r+3^r$ (modulo 5)

b) Etudier, selon les valeurs possibles pour r, la congruence de 2^n+3^n modulo 5.

c) En déduire, selon le cas, les chiffres des unités possibles pour 2^n+3^n .

4) Conclure à l'aide des résultats du 2) et du 3) que le chiffre des unités de 2^n+3^n peut être 3, 5 ou 7 selon la congruence de n modulo 4.