durée : 4 heures **calculatrice autorisée**

Nom Prénom :

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Des réponses peuvent être complétées sur cette feuille. Vous rendrez cette feuille (n'oubliez pas d'**inscrire votre nom**) accompagnée de votre copie.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité, l'exercice de spécialité est à traiter sur une feuille séparée.

***Exercice* 1** : /2 points

Exercice commun à tous les élèves

Restitution organisée de connaissances
Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous une proposition.

Proposition : « Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$. »

Démontrer cette proposition.

***Exercice* 2** : /4 points

Exercice pour les élève *n'ayant pas suivi* l'enseignement de spécialité

Cet exercice comporte plusieurs questions indépendantes, auxquelles il faudra répondre par Vrai ou Faux, **en justifiant**. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On lance 60 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 (ce dé est non truqué).
   a. La probabilité de tomber dix fois sur le numéro 6 est égale à 0,5.
   b. La probabilité de tomber au moins dix fois sur le numéro 6 est égale à 0,5.
2. Voici la répartition des garçons et des filles dans un lycée.

	Seconde	Première	Terminale
Filles	67	38	53
Garçons	46	44	37

   Les événements « être une fille » et « être en Terminale » sont indépendants.
3. **a.** $\lim \dfrac{1-5n^2}{n^2+8n-2} = -5$

   b. $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{n} = 1$
4. **a.** la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ (définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$) est dérivable sur son ensemble de définition et : $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

   b. la fonction $g(x) = x \cdot e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $g'(x) = e^x + x \cdot e^x$

Exercice **3** : /4 points

Exercice commun à tous les élèves

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

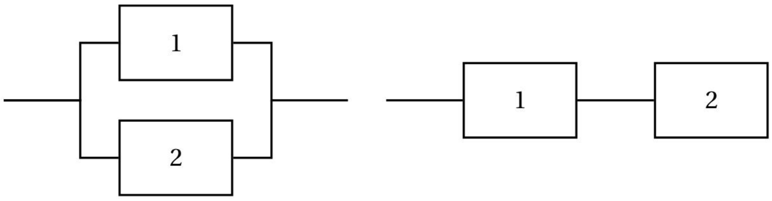
Partie A

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2.

On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A   Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Partie B

Pour déterminer si un composant est défectueux ou pas, on effectue un test.

Un composant étant choisi au hasard, on appelle :
- M l'évènement « le composant est défectueux » ;
- T l'évènement « le composant a un test révélant un problème ».

On admet que :
- 82 % des composants défectueux étudiés ont un test révélant un problème ;
- 73 % des composants non défectueux ont un test ne révélant pas de problème.

On sait de plus que 10 % des composants étudiés sont défectueux.

1. Démontrer que la probabilité qu'un composant ait un test révélant un problème est de $0,325$.
2. Calculer $P_{\overline{T}}(M)$. Interpréter ce résultat.
3. Un composant a un test révélant un problème. Le technicien qui a fait le test se dit qu'en fait, ce composant n'a qu'une chance sur quatre d'avoir réellement un défaut. Qu'en pensez- vous ?

***Exercice* 4** : /5 points

Exercice commun à tous les élèves

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
   Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
   L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

   a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
   c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
   Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.
3. On programme la machine de façon que :
   – à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
   – toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.
   On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
   Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8 w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

***Exercice* 5** : /2 points

Exercice commun à tous les élèves

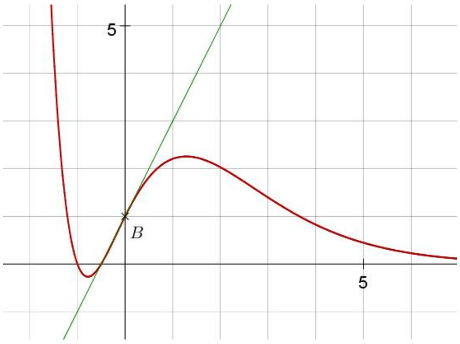
On considère une fonction inconnue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$, où a, b et c désignent des nombres réels non nuls.

On donne : $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ et $f''(0) = -1$,

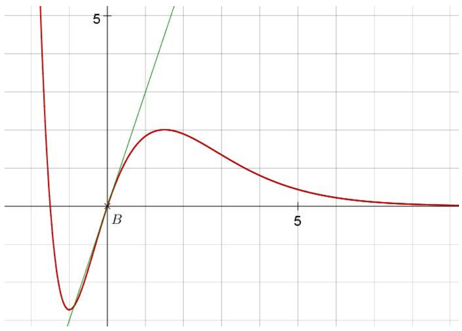
remarque : f'' désigne la fonction dérivée de f'. On l'appelle dérivée seconde ; autrement dit, on l'obtient en dérivant deux fois de suite la fonction f.

1. Déterminer les réels a, b et c.
2. Parmi les trois courbes suivantes, une seule est la représentation graphique de f. Préciser laquelle en expliquant.

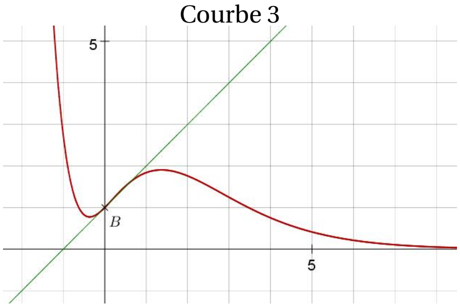
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Exercice commun à tous les élèves

***Exercice* 6** : /3 points

Une suite convergente est-elle majorée ?

remarque : une suite (u_n) est dite majorée, s'il existe une valeur reélle qui ne sera jamais dépassée par les valeurs prises par les éléments de la suite. Autrement dit : il existe M tel que pour tout entier n, $u_n \leqslant M$

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.