durée : 3 heures **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

---

***Exercice* 1** : /2 points

Restitution organisée de connaissances

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous une proposition. Dire, si elle est vraie ou fausse et justifier.

Proposition : « Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$. »

Démontrons cette propriété par récurrence : pour n entier strictement supérieur à 1, on pose : $P(n)$: « $(x^n)' = nx^{n-1}$

initialisation : pour $n = 2$: $(x^2)' = 2x$; la propriété est vérifiée.

hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montré que $P(n+1)$ est alors vraie.

$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n \times x)' = (x^n)' \times x + x^n \times 1$ en appliquant la formule du produit d'une dérivée.

Cela donne alors, en appliquant la propriété $P(n)$: $\left(x^{n+1}\right)' = nx^{n-1} \times x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$; cette dernière relation veut exactement dire que $P(n+1)$ est vraie ; la propriété est héréditaire.

conclusion : $P(2)$ est vraie et : pour $n > 1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ; cela montre que pour tout nombre entier strictement supérieur à 1, $P(n)$ est vraie.

***Exercice* 2** : /2 points

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$.

On sait que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 est égale à : $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On va faire quelques transformations pour se ramener à ce type d'écriture :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

On a dans le terme entre parenthèses, une suite géométrique de premier terme 1, de raison $\dfrac{1}{10}$; on applique la formule précédente :

$$\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}}$$

On obtient donc : $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{10^2} \times \dfrac{10}{9} \times \left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

***Exercice* 3** : /2,5 points

On modélise l'évolution de la population d'une ville A de la manière suivante : on considère qu'elle augmente chaque année de 2 % par rapport à l'année précédente.

Pour une ville B, on considère que sa population augmente de 1 500 personnes chaque année.

Au départ (année 0), on considère que la ville A compte 100 000 habitants et la ville B 125 000.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B au bout de n années après l'année 0.

1. **a.** Calculer le nombre d'habitants de la ville A et le nombre d'habitants de la ville B au bout de dix ans.

   Pour la ville A : $100\,000 \times 1,02^{10} \approx 121\,900$.

   Pour la ville B : $125\,000 + 10 \times 1\,500 = 140\,000$.

   b. Quelle est la nature des suites u et v ? En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

   u est une suite géométrique de raison 1,02, de premier terme 100 000 : $u_n = 100\,000 \times 1,02^n$.

   v est une suite arithmétique de raison 1 500, de premier terme 125 000 : $v_n = 125\,000 + 1\,500n$.

2. Déterminer au bout de combien d'années le nombre d'habitants de la ville A dépassera celui de la ville B.

   On cherche à résoudre : $100\,000 \times 1,02^n \geqslant 125\,000 + 1\,500n$; après plusieurs essais, on trouve que cette inégalité est vraie à partir de $n = 25$.

***Exercice* 4** : 3,5 points

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\dfrac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   On répète 10 fois la même expérience (gratter une carte) de manière indépendante (les cartes n'ont pas de rapport les unes avec les autres), la probabilité de succès de chaque partie est de $\dfrac{1}{10}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{10}$.

   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

   On cherche : $P(X \geqslant 1)$; on peut passer par l'évènement contraire :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

   $P(X = 0)$ se calcule directement (par la calculatrice) ; on obtient : $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0,35 \approx 0,65$

   c. Déterminer l'espérance de X.

   $E(X) = 10 \times \dfrac{1}{10} = 1$

2. Le joueur a développé une addiction forte aux jeux. Il joue 100 cartes à gratter.

a. A votre avis, combien de parties va-t-il gagner ?

Si on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$.

Le joueur peut « espérer » gagner $E(Y) = 100 \times \frac{1}{10} = 10$ fois.

b. Il a gagné 13 parties et est donc convaincu qu'il est dans un jour de chance exceptionnel ; qu'en pensez-vous ?

En lisant le tableau ci-dessous, on constate que l'intervalle de fluctuation à 95 % est [5 ; 16] ; 13 se trouvant dans cet intervalle, on ne peut pas dire que l'on soit dans une situation exceptionnelle. Le joueur a eu de la chance certes, mais pas de manière « anormalement » marquée.

Pour vous aider à argumenter votre réponse, on vous donne ci-dessous un extrait de la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$, ainsi que les probabilités cumulées ($P(X \leqslant k)$). On pourra déterminer à l'aide de ce tableau l'intervalle de fluctuation à 95 % du nombre de parties gagnées par le joueur, lorsqu'il fait 100 parties avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ de gagner à chaque partie.

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	2,6561E-005	2,6561E-005
1	0,000295127	0,000321688
2	0,001623197	0,001944885
3	0,005891602	0,007836487
4	0,015874596	0,023711083
5	0,033865804	0,057576886
6	0,059578729	0,117155615
7	0,088895246	0,206050862
8	0,114823027	0,320873888
9	0,130416277	0,451290165
10	0,131865347	0,583155512
11	0,119877588	0,7030331
12	0,098788012	0,801821113
13	0,074302095	0,876123207
14	0,051303827	0,927427035
15	0,032682438	0,960109473
16	0,019291717	0,97940119
17	0,010591531	0,989992721
18	0,005426525	0,995419246
19	0,002602193	0,998021439
20	0,001170987	0,999192426
21	0,000495656	0,999688082
22	0,000197762	0,999885844
23	7,4519E-005	0,999960363
24	2,6565E-005	0,999986927
...	...	...
99	9,0000E-098	1
100	1,0000E-100	1

***Exercice* 5** : /2 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

1. $u_n = n\sqrt{n}$

$\lim n = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$; par produit, $\lim u_n = +\infty$

2. $v_n = \dfrac{n^2+3n-5}{3}$

$\lim n^2 = +\infty$ et $\lim(3n-5) = +\infty$; par somme, $\lim(n^2+3n-5) = +\infty$; par quotient, $\lim v_n = +\infty$

3. $w_n = \dfrac{3n^2-5}{n^2+2n-3}$

On ne peut pas conclure directement comme précédemment (on a une forme indéterminée) ; on met les termes de plus haut degré en facteur :

$$\frac{3n^2-5}{n^2+2n-3} = \frac{n^2\left(3-\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)} = \frac{3-\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}$$

Or, $\lim\left(3-\dfrac{5}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right) = 1$; par quotient, $\lim w_n = 3$

***Exercice* 6** : /4 points

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car une racine est toujours positive.

FAUX : cette fonction soit définie si et seulement si $9-x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 9$; ainsi, le domaine de définition est $]-\infty;9]$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+6x+9}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

FAUX : le dénominateur de la fraction est égal à $(x+3)^2$ et s'annule donc en -3 ; la fonction est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(10-x)^4}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{4}{(10-x)^5}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.

VRAI : Cette fonction est bien dérivable sur l'intervalle proposé (du type $\dfrac{u}{v}$ avec v ne s'annulant pas sur l'intervalle proposé).

Par ailleurs, $\dfrac{1}{(10-x)^4} = (10-x)^{-4}$; en dérivant, on obtient : $(-4)\times(-1)\times(10-x)^{-5} = \dfrac{4}{(10-x)^5}$

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

VRAI : Cette fonction est bien dérivable sur l'intervalle proposé (du type $\sqrt{u}$ avec u strictement positif sur l'intervalle proposé).

Par ailleurs, $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

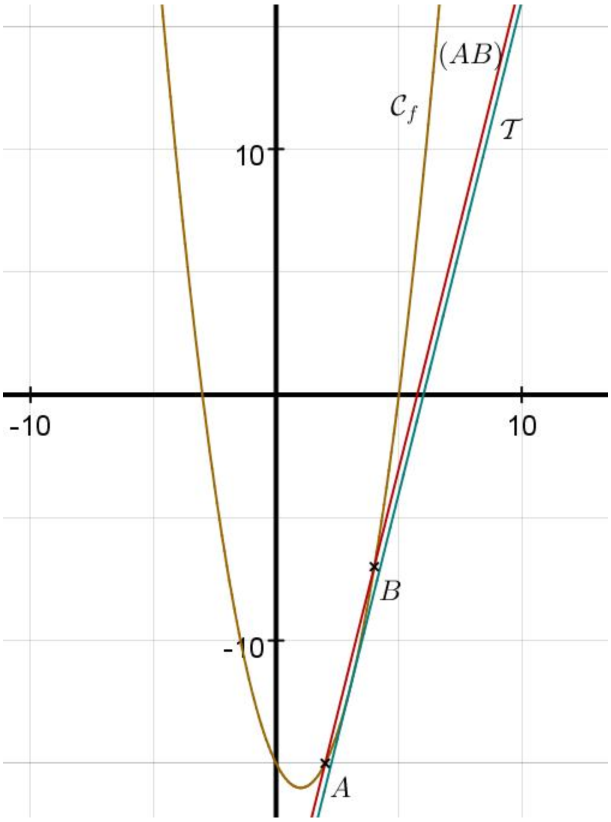
5. Si je monte un col à vélo à 20 km/h et que je le redescends (sans faire de pause) à 40 km/h, ma vitesse moyenne sur l'aller retour est égale à 30 km/h.

FAUX : Si le col fait 20 km de long, je mets une heure à monter et 30 minutes à descendre ; au final, j'aurai mis 1h30min pour faire 40 km, ce qui fait une moyenne d'environ 26,7 km/h ; la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses !

***Exercice* 7** : /3,5 points

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 15$

1. Tracez la représentation graphique de cette fonction dans un repère (à vous de choisir les échelles des axes). On note $\mathscr{C}_f$ cette courbe.



2. Construisez le tableau de variations de la fonction f.

f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme) et :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$; d'où le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $x-1$		-	0	+	
f		↘	-16	↗	

3. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 ; on note $\mathscr{T}$ cette tangente. Construisez la tangente $\mathscr{T}$ dans le repère précédent.

On applique la formule : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$; or, $f(3) = -12$ et $f'(3) = 4$; cela donne :

$y = 4(x-3) - 12$ soit au final $y = 4x - 24$

4. A est le point de la courbe d'abscisse 2 ; B est le point de la courbe d'abscisse 4. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

   $A(2\,;\,-15)$ et $B(4\,;\,-7)$

5. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

   En notant $y = ax + b$ l'équation de la droite (AB), on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} -15 = 2a + b \\ -7 = 4a + b \end{cases}$$

   Par différence entre les lignes, on obtient : $a = \dfrac{-15-(-7)}{2-4} = 4$

   En remplaçant a par 4 dans une ligne, on obtient : $b = -23$.
   Ainsi, (AB) a pour équation $y = 4x - 23$

6. Justifiez que la droite (AB) et la tangente $\mathcal{T}$ sont parallèles.

   La droite et la tangente ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles.

***Exercice* 8** : /1,5 points

On dispose d'une ficelle de 21 cm de long. On veut, à l'aide de cette ficelle, construire un rectangle. Proposez la situation qui permettra de construire le rectangle d'aire maximale.

Si vous le pouvez, essayez de généraliser le résultat en répondant à la question suivante : quel est le rectangle, qui, à périmètre fixé, a l'aire la plus grande ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.

On note l la largeur de ce rectangle et L sa longueur : $L + l = 21 \div 2 = 10,5$

Par ailleurs, $\mathcal{A} = L \times l$ et donc l'aire s'exprime en fonction de l : $\mathcal{A}(l) = l(10,5 - l)$

Il s'agit d'un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et en 10,5, avec un coefficient devant le terme au carré positif ; il atteint son maximum en 5,25.

La configuration permettant d'avoir l'aire maximale est donc celle donnant : $l = L = 5,25$, ce qui signifie qu'on a à faire à un carré.

Généralisation : on note P le périmètre du carré ; $l + L = P \div 2$ et $\mathcal{A} = l \times L = l \times (P \div 2 - l)$.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est une fonction de la variable l (P est un paramètre) ; on reconnaît à nouveau un polynôme du second degré, dont le maximum sera atteint pour $l = P \div 4$; on retrouve de manière plus générale le résultat précédent : le rectangle qui, à un périmètre donné P, a l'aire maximale est le carré de côté $\dfrac{P}{4}$.