durée : 3 heures **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

Ce devoir comporte **7 exercices**.

Proposition de correction

***Exercice* 1** : /2,5 points

Une culture de 4 500 bactéries de type A augmente chaque semaine de 2,5% par rapport à la semaine précédente.

Une culture de 5 000 bactéries de type B augmente de 140 bactéries par semaine.

Pour tout entier n, on note u_n le nombre de bactéries A et v_n le nombre de bactéries B au bout de n semaines.

1. **a.** Calculer le nombre de bactéries A et le nombre de bactéries B au bout de dix semaines.

   Le nombre de bactéries A est multiplié par 1,025 chaque semaine. Au bout de dix semaines, on en aura $4\,500 \times 1,025^{10} \approx 5760$

   Le nombre de bactéries B augmente de 140 chaque semaine. Au bout de dix semaines, on en aura $5\,000 + 140 \times 10 = 6\,400$

   b. Quelle est la nature des suite u et v ? En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

   La suite u est une suite géométrique de premier terme 4 500 et de raison 1,025 ; on a donc : $u_n = 4\,500 \times 1,025^n$

   La suite v est une suite arithmétique de premier terme 5 000 et de raison 140 ; on a donc : $v_n = 5\,000 + 140n$

2. Déterminer au bout de combien de semaines le nombre de bactéries A dépasse celui des bactéries B.

On cherche à résoudre : $4\,500 \times 1{,}025^n > 5\,000 + 140n$.

Pour répondre rigoureusement à cette question, il faudrait faire une étude de fonction et montrer que dès qu'une valeur répond à l'inégalité, toutes les valeurs supérieures y répondent. L'esprit de cette question est plus entre la conjecture et la démonstration ... je vous propose ceci :

Si n augmente, l'expression du membre de gauche augmente plus rapidement que l'expression du membre de droite ; autrement dit, si nous trouvons une valeur de n telle que le membre de gauche est supérieur au membre de droite (notons alors cette valeur n_0), nous pourrons dire que pour les valeurs supérieures à ce n_0, l'inégalité sera vérifiée.

En procédant par essais, nous trouvons : $n_0 = 28$: **le nombre de bactéries A sera supérieur au nombre de bactéries B au bout de 28 semaines**.

***Exercice* 2** : /2,5 points

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilée à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de $0{,}525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et $0{,}525$.

La valeur 0,525 s'obtient par le calcul : $0{,}8 \times 0{,}35 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}3$; ce calcul détermine la proportion de conifères au sein de la jardinerie.

2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :
$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}525^5 \times (1 - 0{,}525)^5$
Finalement $P(X = 5) \approx 0{,}243$.

3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$.

On a alors : $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0{,}984$.

***Exercice* 3** : /2 points

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

2. a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathcal{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

On a $p(X = 2) = \binom{5}{2}0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins un des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n$

En faisant des essais , on remarque que $0,93^{95} > 0,001$ et que $0,93^{96} < 0,001$

Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

***Exercice* 4** : /5 points

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction $x \longmapsto \sqrt{3 - x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car une racine est toujours positive.

FAUX : cette fonction soit définie si et seulement si $3 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 3$; ainsi, le domaine de définition est $]-\infty\ ;\ 3]$

2. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ sur $\mathbb{R}$.

FAUX : on peut déjà remarquer que le trinôme $x^2 - x + 1$ a un discriminant négatif, ce qui signifie qu'il ne s'annule pas ; le coefficient devant x^2 étant positif, le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que la fonction proposée est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour dériver cette fonction, on applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec ici $u(x) = x^2 - x + 1$, et donc $u'(x) = 2x - 1$

Cela donne comme fonction dérivée : $\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$, ce qui montre que la fonction proposée pour être la dérivée est incorrecte.

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

VRAI : le dénominateur de la fraction est un trinôme dont le discriminant Δ égal à :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$; ce discriminant négatif montre que l'expression $x^2 + x + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction $x \mapsto (3x-1)^5$ a pour dérivée $x \mapsto 15(3x-1)^4$ sur $\mathbb{R}$.

VRAI : la fonction à dérivée est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est du type u^n : on utilise la formule $\left(u^n\right)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$, avec ici $u(x) = 3x - 1$ et donc $u'(x) = 3$

On obtient comme fonction dérivée : $3 \cdot 5 \cdot (3x-1)^4$ ce qui est bien la fonction proposée.

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(5-x)^3}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{3}{(5-x)^4}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[\,\cup\,]5\,;\,+\infty[$.

VRAI : Cette fonction est bien dérivable sur l'intervalle proposé (du type $\dfrac{u}{v}$ avec v ne s'annulant pas sur l'intervalle proposé).

Par ailleurs, $\dfrac{1}{(5-x)^3} = (5-x)^{-3}$; en dérivant, on obtient : $(-3) \cdot (-1) \cdot (5-x)^{-4} = \dfrac{3}{(5-x)^4}$

***Exercice* 5** : /3,5 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

1. $u_n = n\sqrt{n}$

$\lim n = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$; par produit, $\lim u_n = +\infty$

2. $v_n = \dfrac{n^2 + 3n - 5}{3}$

$\lim n^2 = +\infty$ et $\lim(3n-5) = +\infty$; par somme, $\lim(n^2 + 3n - 5) = +\infty$; par quotient, $\lim v_n = +\infty$

3. $w_n = \dfrac{3n^2 - 5}{n^2 + 2n - 3}$

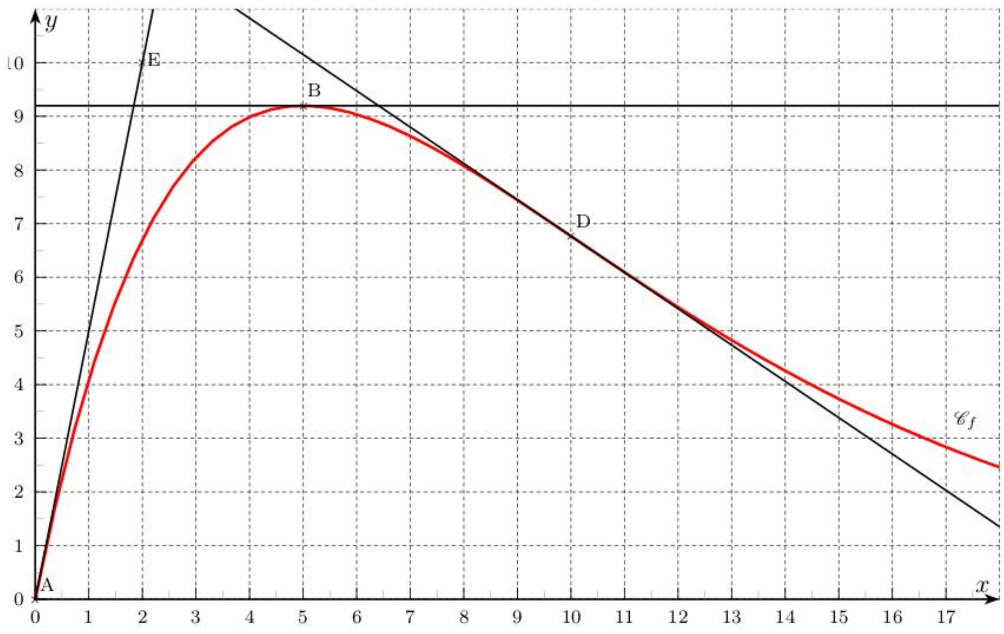
On ne peut pas conclure directement comme précédemment (on a une forme indéterminée) ; on met les termes de plus haut degré en facteur :

$$\frac{3n^2-5}{n^2+2n-3} = \frac{n^2\left(3-\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)} = \frac{3-\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}$$

Or, $\lim\left(3 - \dfrac{5}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\left(1 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$; par quotient, $\lim w_n = 3$

***Exercice* 6** : /2 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathbb{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.
On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2\,;\,10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$. (*les réponses devront Ãªtre justifiées*)

Au point d'abscisse 5 la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale, $f'(5) = 0$.

Au point d'abscisse 0 la tangente à $\mathscr{C}_f$ est la droite (AB), $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10}{2} = 5$.

***Exercice* 7** : /2,5 points

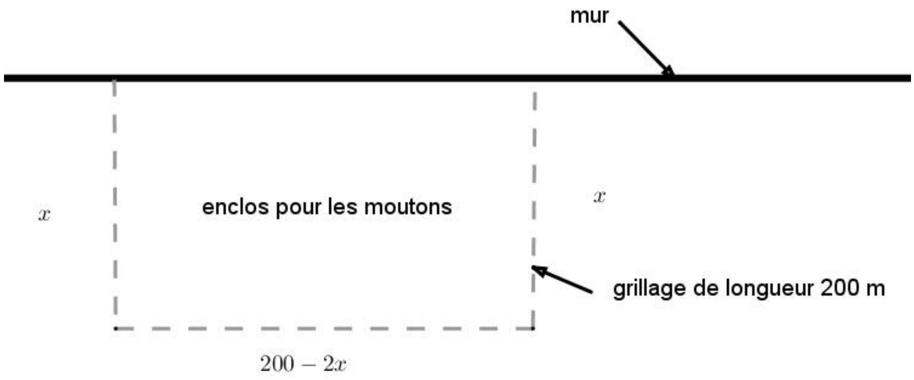
Le père Louis veut faire un enclos pour ses moutons. Il dispose pour cela de 200 m de grillage.

Le hasard faisant bien les choses, le champ qu'il veut utiliser est adossé à un mur, où il n'a pas besoin d'installer de grillage.

Pour le bien-être de ses moutons, le père Louis souhaite qu'ils disposent de la surface d'herbe la plus grande possible. Il souhaite aussi que son champ ait une forme rectangulaire.

Aidez le père Louis à installer ses 200 m de grillage de la manière la plus optimisée qu'il soit. Quelle est alors l'aire du champ grillagé ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.



On note x la largeur du champ constitué par le grillage ; la longueur correspondante est alors égale à $200-2x$; l'aire du champ est égale à $x \times (200-2x)$.

On a ainsi défini une fonction « Aire » que l'on peut noter : $A(x) = (200-2x) \times x$, pour x variant de 0 à 100.

Cette fonction est nulle pour $x = 0$ et $x = 100$, ce qui est bien normal si on regarde la configuration du champ dans ces conditions.
On va étudier cette fonction en calculant sa dérivée : $A'(x) = 200-4x$

Cette dérivée est positive pour $x \in [0;50]$, négative pour $x \in [50;100]$; la fonction admet un maximum pour $x = 50$.

On aurait aussi pu remarquer que la fonction Aire est une fonction trinôme qui a pour racines 0 et 100 : elle atteint son extremum au milieu des racines c'est-à-dire en $x = 50$.

L'aire est donc maximum pour $x = 50$ et elle est égale à $A(50) = 50 \times (200-2\times 50) = 5000$ m^2.