

**durée : 3 heures****calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

Ce devoir comporte **7 exercices**.

---

**Exercice 1 :**

/2,5 points

Une culture de 4 500 bactéries de type  $A$  augmente chaque semaine de 2,5% par rapport à la semaine précédente.

Une culture de 5 000 bactéries de type  $B$  augmente de 140 bactéries par semaine.

Pour tout entier  $n$ , on note  $u_n$  le nombre de bactéries  $A$  et  $v_n$  le nombre de bactéries  $B$  au bout de  $n$  semaines.

1.
    - a. Calculer le nombre de bactéries  $A$  et le nombre de bactéries  $B$  au bout de dix semaines.
    - b. Quelle est la nature des suite  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ? En déduire l'expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  2. Déterminer au bout de combien de semaines le nombre de bactéries  $A$  dépasse celui des bactéries  $B$ .
- 

**Exercice 2 :**

/2,5 points

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur  $H_1$ , 25 % de l'horticulteur  $H_2$  et le reste de l'horticulteur  $H_3$ . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur  $H_1$  comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur  $H_2$  n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur  $H_3$  seulement 30 %.

On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilée à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
  2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?  
On arrondira à  $10^{-3}$ .
  3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?  
On arrondira à  $10^{-3}$ .
-

**Exercice 3 :**

/2 points

Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
    - a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
    - b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à  $10^{-3}$ .
  2. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?
- 

**Exercice 4 :**

/5 points

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction  $x \mapsto \sqrt{3-x}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car une racine est toujours positive.
  2. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$  a pour dérivée  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$  sur  $\mathbb{R}$ .
  3. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
  4. La fonction  $x \mapsto (3x-1)^5$  a pour dérivée  $x \mapsto 15(3x-1)^4$  sur  $\mathbb{R}$ .
  5. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{(5-x)^3}$  a pour dérivée  $x \mapsto \frac{3}{(5-x)^4}$  sur l'intervalle  $]-\infty; 5[ \cup ]5; +\infty[$ .
- 

**Exercice 5 :**

/3,5 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

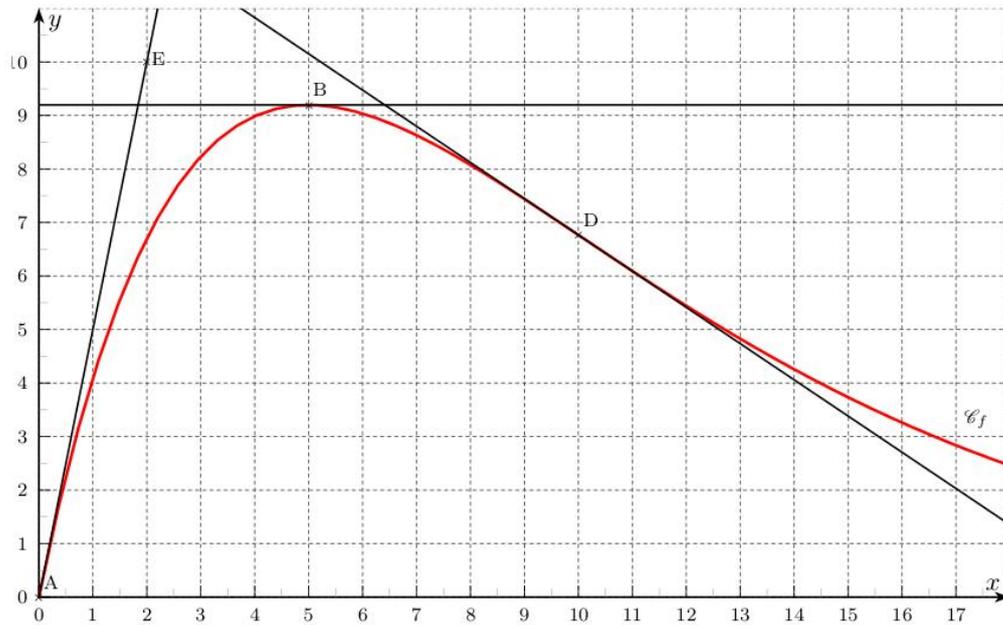
1.  $u_n = n\sqrt{n}$
  2.  $v_n = \frac{n^2+3n-5}{3}$
  3.  $w_n = \frac{3n^2-5}{n^2+2n-3}$
-

**Exercice 6 :**

/2 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 18]$  ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées  $(2 ; 10)$  et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Donner les valeurs de  $f'(5)$  et de  $f'(0)$ . (les réponses devront être justifiées)

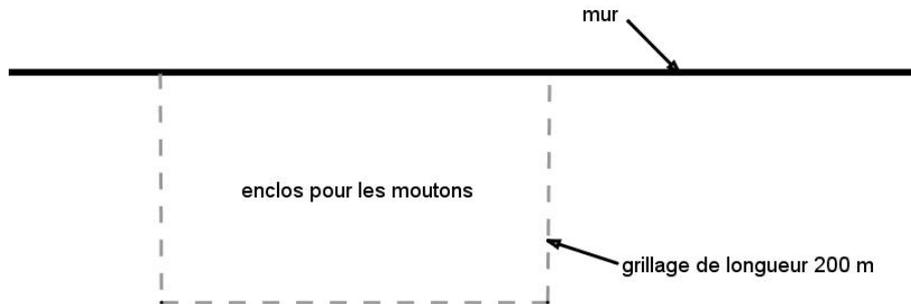
---

**Exercice 7 :**

/2,5 points

Le père Louis veut faire un enclos pour ses moutons. Il dispose pour cela de 200 m de grillage.

Le hasard faisant bien les choses, le champ qu'il veut utiliser est adossé à un mur, où il n'a pas besoin d'installer de grillage.



Pour le bien-être de ses moutons, le père Louis souhaite qu'ils disposent de la surface d'herbe la plus grande possible. Il souhaite aussi que son champ ait une forme rectangulaire.

Aidez le père Louis à installer ses 200 m de grillage de la manière la plus optimisée qu'il soit. Quelle est alors l'aire du champ grillagé ?

*Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.*

---