Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Un patient est soigné par injection d'une substance médicamenteuse dans le sang.

Au temps $t = 0$, on lui injecte 1,8 unités de produit, qui est peu à peu assimilé par l'organisme, à raison de 30 % par heure.

Toutes les heures suivantes, on lui réinjecte 1,8 unités de produit.

Pour des raison de tolérance, la quantité de médicament dans le sang ne doit jamais être supérieure à 5,5 unités de produit.

Faut-il arrêter d'injecter le produit à un moment ? Si oui, au bout de combien d'heures ?

Pour répondre à a cette question, on va **modéliser** la quantité de produit dans le sang par une suite : on note c_n la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang au bout de n heures ; on a de plus $c_0 = 1,8$.

1. Justifier que pour tout entier n : $c_{n+1} = 0,7 \times c_n + 1,8$

Au bout de n heures, le patient a une quantité de produit égale à c_n ; une heure après, il a perdu 30 % de cette quantité. Il lui en reste donc $0,7 \times c_n$; à ce moment-là, on lui en ajoute 1,8 unités. La quantité présente après $n+1$ heures est donc : $c_{n+1} = 0,7c_n + 1,8$.

2. Soit d la suite de terme général : $d_n = c_n - 6$.

a. Montrer que pour tout entier n : $d_{n+1} = 0,7 \times d_n$

$d_{n+1} = c_{n+1} - 6 = 0,7 \times c_n + 1,8 - 6 = 0,7c_n - 4,2 = 0,7(c_n - 6) = 0,7d_n$

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n, pour tout entier n.

d_n est une suite géométrique de raison 0,7, de premier terme $d_0 = c_0 - 6 = 1,8 - 6 = -4,2$

Ainsi, $d_n = -4,2 \times (0,7)^n$

c. En déduire enfin l'expression de c_n en fonction de n, pour tout entier n.

$c_n = d_n + 6$ et donc $c_n = 6 - 4,2 \times (0,7)^n$

3. Quelle est la limite de c_n ? Qu'en déduire par rapport à la problématique initiale, à savoir ne pas dépasser 5,5 unités de produit dans le sang ?

$(0,7)^n$ est une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 : elle converge vers 0. Ainsi, c_n converge vers 6.

Cela veut dire qu'à un moment donné, la quantité de produit dépassera 5,5 unités.

4. Construire un algorithme permettant de dire au bout de combien d'heures la quantité de produit dans le sang dépassera 5,5 unités. Le faire fonctionner sur sa calculatrice.

Entrée
Saisir la valeur initiale de la quantité injectée c. *// « c » est la quantité de produit dans le sang*
Affecter à h la valeur 0. *// « h » est le compteur des heures*
Traitement
Tant que $c < 5,5$
Affecter à c la valeur $0,7 \times c + 1,8$
Affecter à h la valeur $h + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher h

Après 6 heures, la quantité de produit dépasse 5,5 unités.

5. Il faut donc réduire la quantité de produit à injecter dans le sang à chaque heure. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, proposée une quantité (optimale) à injecter pour ne jamais dépasser les 5,5 unités dans le sang.

On peut modifier dans l'algorithme précédent la valeur 1,8 dans le but que la quantité de produit dans le sang ne dépasse jamais 5,5 ; à ce moment-là, le programme tournera sans s'arrêter ... puisque la condition Tant que $c < 5,5$ ne sera jamais respectée ....

On peut utiliser un tableur, faire plusieurs essais ; voici quelques copies d'écran :

n	c_n	c_0=	1,8
0	1,8		
1	3,06		
2	3,942		
3	4,5594		
4	4,99158		
5	5,294106		
6	5,5058742		
7	5,65411194		
8	5,757878358		
9	5,8305148506		
10	5,8813603954		
11	5,9169522768		
12	5,9418665938		
13	5,9593066156		
14	5,9715146309		
15	5,9800602417		
16	5,9860421692		
17	5,9902295184		
18	5,9931606629		
19	5,995212464		
20	5,9966487248		
21	5,9976541074		
22	5,9983578752		
23	5,9988505126		
24	5,9991953588		
25	5,9994367512		
26	5,9996057258		
27	5,9997240081		
28	5,9998068057		
29	5,999864764		
30	5,9999053348		
31	5,9999337343		
32	5,999953614		

n	c_n	c_0=	1,5
0	1,5		
1	2,55		
2	3,285		
3	3,7995		
4	4,15965		
5	4,411755		
6	4,5882285		
7	4,71175995		
8	4,798231965		
9	4,8587623755		
10	4,9011336629		
11	4,930793564		
12	4,9515554948		
13	4,9660888464		
14	4,9762621925		
15	4,9833835347		
16	4,9883684743		
17	4,991857932		
18	4,9943005524		
19	4,9960103867		
20	4,9972072707		
21	4,9980450895		
22	4,9986315626		
23	4,9990420938		
24	4,9993294657		
25	4,999530626		
26	4,9996714382		
27	4,9997700067		
28	4,9998390047		
29	4,9998873033		
30	4,9999211123		
31	4,9999447786		
32	4,999961345		

n	c_n	c_0=	1,65
0	1,65		
1	2,805		
2	3,6135		
3	4,17945		
4	4,575615		
5	4,8529305		
6	5,04705135		
7	5,182935945		
8	5,2780551615		
9	5,3446386131		
10	5,3912470291		
11	5,4238729204		
12	5,4467110443		
13	5,462697731		
14	5,4738884117		
15	5,4817218882		
16	5,4872053217		
17	5,4910437252		
18	5,4937306076		
19	5,4956114254		
20	5,4969279977		
21	5,4978495984		
22	5,4984947189		
23	5,4989463032		
24	5,4992624123		
25	5,4994836886		
26	5,499638582		
27	5,4997470074		
28	5,4998229052		
29	5,4998760336		
30	5,4999132235		
31	5,4999392565		
32	5,4999574795		

On conjecture que la valeur optimale à injecter initialement est **1,65 unités de produit**.

Exercice 2 *(facultatif)* :

Il s'agit dans cette question de démontrer que la valeur conjecturée précédemment est bien la valeur optimale. Pour ce faire, il faut aller regarder de plus près ce qui se passe dans les suites dites « arithmético géométriques » comme celle de l'exercice 1.

Ce type de suite apparaît fréquemment, et la méthode est toujours la même : on introduit une suite intermédiaire, on vous demande de prouver que cette suite intermédiaire est géométrique pour vous aider à avancer : on va essayer de comprendre ici comment créer cette suite intermédiaire.

Reprenez la représentation graphique demandée dans l'exercice que je viens de citer et faites de même avec la suite de l'exercice 1.

Ces suites semblent converger (l'une par le haut, l'autre par le bas) vers le point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et une droite dont l'équation est en rapport avec la suite en question :
$y = 0,7x - 1,8$ pour l'exercice précédent.

Il est intéressant de déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ; on est donc amené à résoudre (en prenant les valeurs relatives à l'exercice 1) :

$$\begin{cases} y = 0,7x + 1,8 \\ y = x \end{cases}$$

Cela revient en fait à résoudre : $x = 0,7x + 1,8$ qui représente le « point fixe » d'une fonction f définie par $f(x) = 0,7x + 1,8$

Cette résolution donne $x = 6$ *(à vérifier)*

$x = 0,7x + 1,8 \iff 0,3x = 1,8 \iff x = \dfrac{1,8}{0,3} \iff x = 6$

Maintenant, on introduit une suite intermédiaire toujours de la même manière : $\boxed{d_n = c_n - 6}$ (suite précédente à laquelle on soustrait la valeur du point fixe) ; cette suite d_n sera toujours une suite géométrique ; voici les explications :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} c_{n+1} & = & 0,7 \times c_n & + & 1,8 \\ 6 & = & 0,7 \times 6 & + & 1,8 \end{array}\right.$$

La deuxième ligne de cette écriture traduit juste le fait que 6 est le « point fixe » de la fonction f (avec $f(x) = 0,7x + 1,8$), et donc que $0,7 \times 6 + 1,8$ est bien égal à 6. Il est commode d'écrire les deux égalités comme je les ai présentées pour comprendre la suite.

En soustrayant terme à terme les deux lignes précédentes, on obtient : $c_{n+1} - 6 = 0,7(c_n - 6)$ et donc la suite d_n est géométrique de raison 0,7 *(à vérifier)*

$c_{n+1} - 6 = (0,7 \times c_n + 1,8) - (0,7 \times 6 + 1,8) = 0,7 \times (c_n - 6)$

Ceci donne bien : $d_{n+1} = 0,7 \times d_n$, ce qui signifie que la suite d_n est géométrique de raison 0,7.

On peut alors exprimer d_n en fonction de n (puisque d_0 est connu, dès lors qu'on connaît c_0) *(à faire)*

$d_0 = c_0 - 6 = 1,8 - 6 = -4,2$ et $d_n = -4,2(0,7)^n$

On utilise l'expression de d_n pour déterminer celle de c_n, puisque les deux sont liées par la relation $d_n = c_n - 6$ *(à faire)*

On peut alors exprimer totalement c_n en fonction de n *(à faire)*; on remarque alors que cette suite converge vers la fameuse valeur 6 *(à vérifier)*, qui est le point fixe de la fonction $f(x) = 0,7x + 1,8$

$c_n = d_n + 6 = 6 - 4,2(0,7)^n$: c_n converge bien vers 6 (le point fixe de la fonction f).

Ainsi, si on veut que la suite c_n converge vers 5,5, il faut s'arranger pour modifier la valeur 1,8 de telle sorte que le point fixe de la fonction f ne soit plus 6 mais 5,5. On peut alors déterminer la valeur qui doit remplacer 1,8 pour que cela convienne. *(à faire)*

f est du type : $f(x) = 0,7x + b$ et 5,5 est le point fixe de f donc : $5,5 = 0,7 \times 5,5 + b$

On a alors : $5,5 = 0,7 \times 5,5 + b \iff b = 0,3 \times 5,5 \iff b = 1,65$

Ainsi, si $f(x) = 0,7x + 1,65$, en reprenant le raisonnement précédent :

- on pose $c_{n+1} = 0,7 \times c_n + 1,65$ et $c_0 = 1,65$
- $f(x) = 0,7x + 1,65$ a pour point fixe 5,5 (on a tout fait pour que ce soit le cas !)
- la suite $d_n = c_n - 5,5$ est géométrique de raison 0,7, de premier terme -3,85 : $d_n = -3,85(0,7)^n$
- c_n s'exprime ainsi : $c_n = 5,5 - 3,85(0,7)^n$: elle converge vers 5,5 en croissant, ce qui veut dire qu'on ne dépassera jamais cette valeur.

***Exercice* 3** *(facultatif - suite)* :

A vous de concevoir les questions qui permettront à un élève de terminale S de résoudre le problème suivant, en vous inspirant des étapes faites dans l'ex 2.

Consigne : une ville voit sa population se modifier au cours du temps. On considère que chaque année, 25% de la population de l'année précédente quitte la ville, et que 20 000 personnes venant de l'extérieur s'installent dans cette ville.

L'année 0 (début de l'étude), la ville compte 100 000 habitants.

Comment va évoluer la population de cette ville les années à venir si l'évolution reste la même ; la population va-t-elle stagner ? augmenter indéfiniment ? se rapprocher de 0 ?

On pose p_n la population à l'année n : la traduction de l'énoncé donne :
* $p_0 = 100\,000$
* $p_{n+1} = 0,75 \times p_n + 20\,000$

On cherche le point fixe de la fonction $f(x) = 0,75x + 20\,000$

On résout : $x = 0,75x + 20\,000 \iff 0,25x = 20\,000 \iff x = 80\,000$

Cette valeur vérifie : $80\,000 = 0,75 \times 80\,000 + 20\,000$

On pose alors : $d_n = p_n - 80\,000$

Ainsi, $d_{n+1} = p_{n+1} - 80\,000 = (0,75 \times p_n + 20\,000) - (0,75 \times 80\,000 + 20\,000) = 0,75(p_n - 80\,000) = 0,75p_n$

d_n est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme $d_0 = 100\,000 - 80\,000 = 20\,000$ et donc : $d_n = 20\,000(0,75)^n$

Cela permet de trouver l'expression de p_n : $p_n = 80\,000 + 20\,000(0,75)^n$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que la population va tendre vers 80 000.

<u>Voici les questions qui pourraient guider cette résolution</u> :

1. Montrer que la situation peut être modélisée par la suite p_n définie par
   * $p_0 = 100\,000$
   * $p_{n+1} = 0,75 \times p_n + 20\,000$
2. On introduit la suite $d_n = p_n - 80\,000$; montrer que c'est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
3. En déduire l'expression de p_n.
4. La population augmente-t-elle d'année en année ?
5. En quelle année la population passera sous les 90 000 personnes ?
6. Quelle est l'évolution de la population à long terme ?