Nom/Prénom :

***Exercice* 1** :

Un patient est soigné par injection d'une substance médicamenteuse dans le sang.

Au temps $t = 0$, on lui injecte 1,8 unités de produit, qui est peu à peu assimilé par l'organisme, à raison de 30% par heure.

Toutes les heures suivantes, on lui réinjecte 1,8 unités de produit.

Pour des raison de tolérance, la quantité de médicament dans le sang ne doit jamais être supérieure à 5,5 unités de produit.

Faut-il arrêter d'injecter le produit à un moment ? Si oui, au bout de combien d'heures ?

Pour répondre à a cette question, on va **modéliser** la quantité de produit dans le sang par une suite : on note c_n la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang au bout de n heures ; on a de plus $c_0 = 1,8$.

1. Justifier que pour tout entier n : $c_{n+1} = 0,7 \times c_n + 1,8$

2. Soit d la suite de terme général : $d_n = c_n - 6$.

  a. Montrer que pour tout entier n : $d_{n+1} = 0,7 \times d_n$

  b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n, pour tout entier n.

  c. En déduire enfin l'expression de c_n en fonction de n, pour tout entier n.

3. Quelle est la limite de c_n ? Qu'en déduire par rapport à la problématique initiale, à savoir ne pas dépasser 5,5 unités de produit dans le sang ?

4. Construire un algorithme permettant de dire au bout de combien d'heures la quantité de produit dans le sang dépassera 5,5 unités. Le faire fonctionner sur sa calculatrice.

5. Il faut donc réduire la quantité de produit à injecter dans le sang à chaque heure. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, proposée une quantité (optimale) à injecter pour ne jamais dépasser les 5,5 unités dans le sang.

***Exercice* 2** *(facultatif)* :

Il s'agit dans cette question de démontrer que la valeur conjecturée précédemment est bien la valeur optimale. Pour ce faire, il faut aller regarder de plus près ce qui se passe dans les suites dites « arithmético géométriques » comme celle de l'exercice 1.

Ce type de suite apparaît fréquemment, et la méthode est toujours la même : on introduit une suite intermédiaire, on vous demande de prouver que cette suite intermédiaire est géométrique pour vous aider à avancer : on va essayer de comprendre ici comment créer cette suite intermédiaire.

Reprenez la représentation graphique demandée dans l'exercice 2 du DM n°2 et faites de même avec la suite de l'exercice 1.

Ces suites semblent converger (l'une par le haut, l'autre par le bas) vers le point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et une droite dont l'équation est en rapport avec la suite en question :
$y = 0,7x - 1,8$ pour l'exercice précédent.

Il est intéressant de déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ; on est donc amené à résoudre (en prenant les valeurs relatives à l'exercice 1) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} y & = & 0,7x & + & 1,8 \\ y & = & x & & \end{array}\right.$$

Cela revient en fait à résoudre : $x = 0,7x + 1,8$ qui représente le « point fixe » d'une fonction f définie par $f(x) = 0,7x + 1,8$

Cette résolution donne $x = 6$ *(à vérifier)*

Maintenant, on introduit une suite intermédiaire toujours de la même manière : $\boxed{d_n = c_n - 6}$ (suite précédente à laquelle on soustrait la valeur du point fixe) ; cette suite d_n sera toujours une suite géométrique ; voici les explications :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} c_{n+1} & = & 0,7 \times c_n & + & 1,8 \\ 6 & = & 0,7 \times 6 & + & 1,8 \end{array}\right.$$

La deuxième ligne de cette écriture traduit juste le fait que 6 est le « point fixe » de la fonction f (avec $f(x) = 0,7x + 1,8$), et donc que $0,7 \times 6 + 1,8$ est bien égal à 6. Il est commode d'écrire les deux égalités comme je les ai présentées pour comprendre la suite.

En soustrayant terme à terme les deux lignes précédentes, on obtient : $c_{n+1} - 6 = 0,7(c_n - 6)$ et donc la suite d_n est géométrique de raison 0,7 *(à vérifier)*

On peut alors exprimer d_n en fonction de n (puisque d_0 est connu, dès lors qu'on connaît c_0) *(à faire)*

On utilise l'expression de d_n pour déterminer celle de c_n, puisque les deux sont liées par la relation $d_n = c_n - 6$ *(à faire)*

On peut alors exprimer totalement c_n en fonction de n *(à faire)*; on remarque alors que cette suite converge vers la fameuse valeur 6 *(à vérifier)*, qui est le point fixe de la fonction $f(x) = 0,7x + 1,8$

Ainsi, si on veut que la suite c_n converge vers 5,5, il faut s'arranger pour modifier la valeur 1,8 de telle sorte que le point fixe de la fonction f ne soit plus 6 mais 5,5. On peut alors déterminer la valeur qui doit remplacer 1,8 pour que cela convienne.*(à faire)*

***Exercice* 3** *(facultatif - suite)* :

A vous de concevoir les questions qui permettront à un élève de terminale S de résoudre le problème suivant, en vous inspirant des étapes faites dans l'ex 2.

Consigne : une ville voit sa population se modifier au cours du temps. On considère que chaque année, 25% de la population de l'année précédente quitte la ville, et que 20 000 personnes venant de l'extérieur s'installent dans cette ville.

L'année 0 (début de l'étude), la ville compte 100 000 habitants.

Comment va évoluer la population de cette ville les années à venir si l'évolution reste la même ; la population va-t-elle stagner ? augmenter indéfiniment ? se rapprocher de 0 ?