Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; le but de cet exercice est d'étudier cette fonction.

1. **a.** Quel est l'ensemble de définition de f ?

f est définie pour $\mathbb{R}$, puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Quel est l'ensemble de de dérivation de f ? Quelle est sa dérivée ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

c. Construire le tableau de variation de f.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} < 0 \Leftrightarrow e^x < e^{-x}$

Or, on a vu dans le cours que : $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$

Ainsi, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -x$, ce qui veut dire :

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$; on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f aux points d'abscisse : -1, 0 et 1.

<u>en -1</u> : $f(-1) = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \dfrac{e + e^{-1}}{2}$ et $f'(-1) = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2} = -\dfrac{e - e^{-1}}{2}$

Ainsi, la tangente a pour équation : $y = -\dfrac{e - e^{-1}}{2}(x+1) + \dfrac{e + e^{-1}}{2}$ ce qui donne :

$$\boxed{y = -\frac{e - e^{-1}}{2}x + e^{-1}}$$

<u>en 0</u> : $f(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$ et $f'(1) = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = 0$

Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 0 \times x + 1$ ce qui donne :

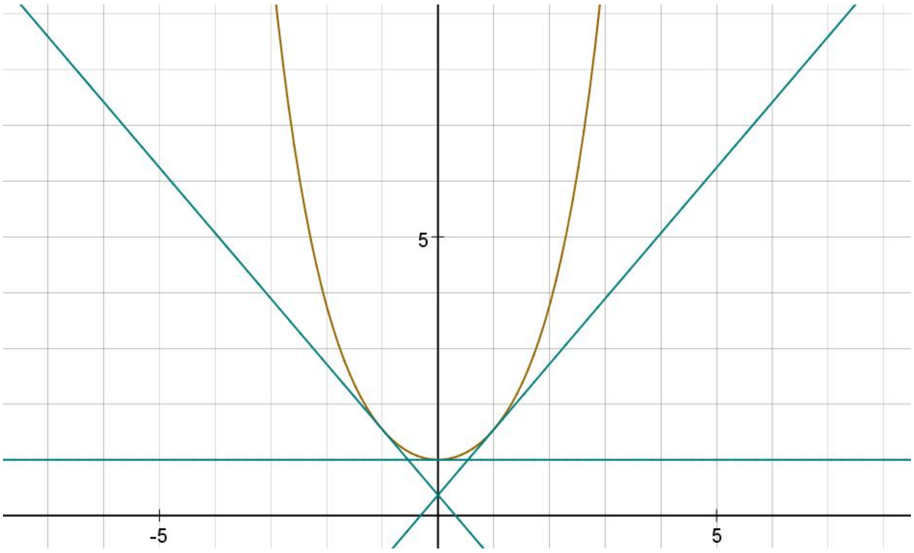
$\boxed{y = 1}$ (tangente horizontale)

<u>en 1</u> : $f(1) = \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \dfrac{e + e^{-1}}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} = \dfrac{e - e^{-1}}{2}$

Ainsi, la tangente a pour équation : $y = \dfrac{e - e^{-1}}{2}(x-1) + \dfrac{e + e^{-1}}{2}$ ce qui donne :

$$\boxed{y = \frac{e - e^{-1}}{2}x + e^{-1}}$$

e. Construire dans un repère orthonormé ou sur logiciel la courbe représentative de la fonction f, après avoir construit les tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 1.



Cette fonction f porte le nom de « cosinus hyperbolique » ; écrite sous la forme $\frac{a}{2}\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$, elle résout le problème dit « de la chaînette », en modélisant entre autre la forme que prend un câble sous l'effet de son poids (par exemple un câble de téléphérique ou un câble électrique). Pour plus d'informations, vous pouvez faire une recherche sous le nom « équation de la chaînette ».

On va donc à présent étudier la fonction

$$g(x) = \frac{a}{2}\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2},$$

où a désigne un nombre réel strictement positif quelconque.

2. **a.** Quel est l'ensemble de définition de g ?

g est définie pour $\mathbb{R}$, puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Quel est l'ensemble de de dérivation de g ? Quelle est sa dérivée ?

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = a\frac{ae^{ax} - ae^{-ax}}{4} = \frac{a^2(e^{ax} - e^{-ax})}{4}$$

c. Construire le tableau de variation de g.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} < 0 \Leftrightarrow e^{ax} < e^{-ax}$$

Or, on a vu dans le cours que : $c < d \Leftrightarrow e^c < e^d$

Ainsi, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow ax < -ax$, ce qui veut dire :

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ (puisque $a > 0$) ; on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de g'		-	0	+	
g		↘	1	↗	

d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f aux points d'abscisse : -1, 0 et 1.

<u>en -1</u> : $g(-1) = \dfrac{e^{-a} + e^{a}}{2}$ et $g'(-1) = \dfrac{a^2(e^{-a} - e^{a})}{4} = -\dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4}$

Ainsi, la tangente a pour équation : $\boxed{y = -\dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4}(x+1) + \dfrac{a^2(e^{a} + e^{-a})}{4}}$

<u>en 0</u> : $g(0) = \dfrac{e^{0} + e^{0}}{2} = 1$ et $g'(1) = \dfrac{a^2(e^{0} - e^{0})}{2} = 0$

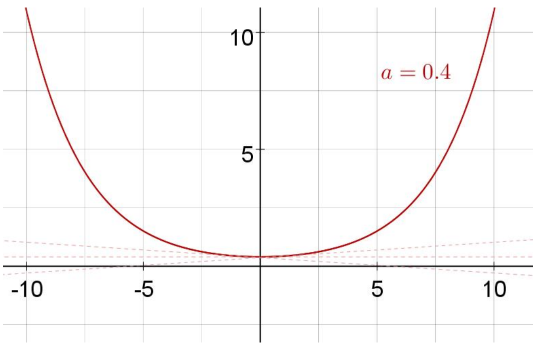
Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 0 \times x + 1$ ce qui donne :

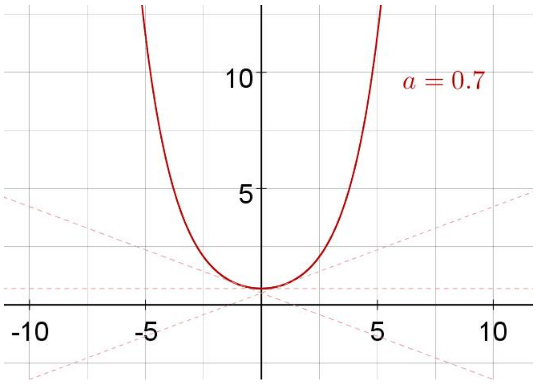
$\boxed{y = 1}$ (tangente horizontale)

<u>en 1</u> : $g(1) = \dfrac{e^{a} + e^{-a}}{2}$ et $g'(1) = \dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4} = \dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4}$

Ainsi, la tangente a pour équation : $\boxed{y = \dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4}(x-1) + \dfrac{a^2(e^{a} - e^{-a})}{4}}$

e. Construire dans un repère orthonormé ou sur logiciel la courbe représentative de la fonction f, après avoir construit les tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 1 **pour différentes valeurs de** a.





***Exercice* 2** :

1. Qu'est-ce que la loi Binomiale ?
   a. Définition
   b. Comment générer la loi Binomiale ? : (Écriture + Paramètres de la loi)
   c. A quoi ça peut servir ?
   d. Exemple
2. Propriétés et coefficients binomiaux :
   a. Propriétés :
   b. Formule de la loi Binomiale :
   c. Formules espérance et variance :
   d. Propriétés des coefficients binomiaux :
3. Le triangle de PASCAL :
   a. Qu'est-ce que c'est ?
   b. A quoi sert-il ?
4. Y a-t-il une représentation de la loi binomiale ?

voir le cours sur le sujet **ici** par exemple