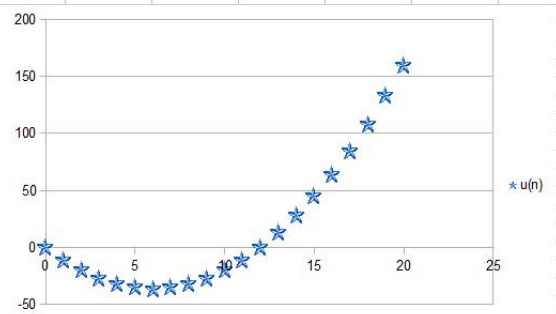
Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$

1. **a.** En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite.

n	u(n)	n²-12n
0	0	0
1	-11	-11
2	-20	-20
3	-27	-27
4	-32	-32
5	-35	-35
6	-36	-36
7	-35	-35
8	-32	-32
9	-27	-27
10	-20	-20
11	-11	-11
12	0	0
13	13	13
14	28	28
15	45	45
16	64	64
17	85	85
18	108	108
19	133	133
20	160	160



b. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité. Si oui, laquelle ?

Les points semblent se trouver sur un parabole.

2. On cherche à déterminer la formule explicite de u_n, c'est-à-dire l'expression de u_n en fonction de n, pour n'importe quel entier n.

a. A l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule puis la tester en utilisant la colonne C du tableur.

Après plusieurs essais, on peut conjecturer : $u_n = n^2 - 12n$

En saisissant la formule correspondante dans la colonne C du tableur, on remarque qu'on obtient les mêmes valeurs pour $n = 0$ à 20, **ce qui ne prouve rien** mais donne envie de conjecturer ce résultat.

b. Démontrer le résultat conjecturé par récurrence.

La propriété que l'on veut démontrer est : $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = n^2 - 12n$ »

Initialisation : pour $n = 0$, c'est vrai puisque $u_0 = 0 = 0^2 - 12 \times 0$

Hérédité : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

Le but est donc de montrer que $u_{n+1} = (n+1)^2 - 12(n+1)$, c'est-à-dire :
$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 = n^2 - 10n - 11$

D'après la définition de la suite : $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$; en utilisant $\mathscr{P}(n)$, on peut écrire :

$u_{n+1} = n^2 - 12n + 2n - 11 = n^2 - 10n - 11$

Le but est atteint, puisque $n^2 - 10n - 11 = (n+1)^2 - 12(n+1)$ (en relisant le développement fait deux lignes plus haut « à l'envers »)

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

***Exercice* 2** :

Soit a un réel strictement positif.

Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $(1+a)^n \geqslant 1+na$

Initialisation : pour $n=0$, la propriété est vraie puisque $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $(1+a)^n \geqslant 1+na$; nous allons montrer que la propriété est vraie au rang suivant, c'est-à-dire que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$; or, comme $(1+a)^n \geqslant 1+na$ et que $1+a>0$, on obtient :

$(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)\times(1+a)$; développons ce deuxième terme : $(1+na)\times(1+a) = 1+na+a+na^2$

Comme $na^2 \geqslant 0$, $1+na+a+na^2 \geqslant 1+na+a$

Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a = 1+(n+1)a$: la propriété est bien héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

***Exercice* 3** :

Une suite convergente (vers un réel) est-elle majorée ?

Oui ; en voici une démonstration.

Notons l la limite de cette suite (l est un réel quelconque).

Dire que la suite (u_n) converge vers l, c'est dire qu'à partir d'un certains rang, toutes les valeurs sont « près » de l. Choisissons l'intervalle $[l-1; l+1]$; à partir du rang N, toutes les valeurs de la suite se trouvent dans cet intervalle.

Les valeurs prises par la suite, entre le rang 0 et la rang N ont un plus grand élément ; on le note M_1.

Notons $M_2 = l+1$.

Ainsi, pour $n \leqslant N$, $u_n \leqslant M_1$;

et pour $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M_2$

En notant M le maximum de M_1 et M_2, on a trouvé un majorant de la suite (u_n). Cela montre que la suite est majorée.

remarque : on montrerait de la même manière que la suite est minorée.