Proposition de corrigé

L'objectif de ce devoir maison est de bien comprendre la notion d'intervalle de fluctuation, obtenu grâce à la loi binomiale.

On part de la situation suivante : on lance un dé bien équilibré (dé à 6 faces) et on souhaite comptabiliser le nombre de 6 sortis après 60 lancers.

1. Pour découvrir l'intervalle de fluctuation :

- a. On définit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 sortis. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Il y a répétition de manière indépendante d'une expérience aléatoire à deux issues : X , qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.

- b. Dire pourquoi le nombre de succès le plus attendu est 10 ; à quelle grandeur cela correspond-il ?

Une chance sur six, avec 60 répétitions : on s'attend à avoir 10 succès.

Cela correspond à l'espérance mathématique de la loi binomiale : $E(X) = n \cdot p = \frac{1}{6} \times 60 = 10$

- c. Quelle est la probabilité qu'il y ait 10 fois le numéro 6 sortis ? Êtes-vous prêt à parier une forte somme d'argent qu'il y aura 10 numéro 6 sortis ?

$P(X = 10) \approx 0,137$; je ne parie pas !

- d. Quelle est la probabilité qu'il y ait 9, 10 ou 11 fois le numéro 6 sortis ? Vous pariez ?

$P(9 \leq X \leq 11) \approx 0,396$; je ne parie toujours pas !

- e. Quelle est la probabilité qu'il y ait 8, 9, 10, 11 ou 12 fois le numéro 6 sortis ? Vous pariez ?

$P(8 \leq X \leq 12) \approx 0,614$; je ne parie toujours pas !

- f. On continue de la même manière (on prend plusieurs résultats possibles, de manière « symétrique » par rapport à 10) jusqu'à regrouper 95 % des valeurs. Combien de numéros 6 sortis dans 95 % des cas ?

$P(5 \leq X \leq 15) \approx 0,946$ et $P(4 \leq X \leq 16) \approx 0,9774$

On a (au moins) 95 % de chance d'obtenir entre 4 et 16 fois le numéro 6 qui sort ; là, je parie !

2. Une méthode plus efficace :

- a. Plutôt que de considérer que l'on retient 95 % des valeurs, on considère ce que l'on rejette : 5 % des valeurs, et ce, de manière « symétrique » par rapport à la valeur de plus forte probabilité ; c'est à dire que l'on va rejeter 2,5 % des « plus petites » valeurs. Pour cela, on utilise **la loi binomiale cumulative** : quelle est la première valeur de k pour laquelle $P(X \leq k)$ dépasse 2,5 % soit 0,025 ? Cela constitue la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

$P(X \leq 4) \approx 0,020$ et $P(X \leq 5) \approx 0,0512$: par cette méthode, la borne inférieure est 5.

- b. On rejettera ensuite 2,5 % des « plus grandes » valeurs, c'est à dire qu'on conserve 97,5 % des « plus petites » valeurs. Pour cela, on utilise **la loi binomiale cumulative** : quelle est la première valeur de k pour laquelle $P(X \leq k)$ dépasse 97,5 % soit 0,975 ? Cela constitue la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

$P(X \leq 15) \approx 0,966$ et $P(X \leq 16) \approx 0,984$: par cette méthode, la borne supérieure est 16.

- c. Les résultats sont-ils cohérents avec ce que l'on avait trouvé par la méthode plus empirique de la question 1) ?

Première méthode : $I = [4 ; 16]$

Seconde méthode : $I = [5 ; 16]$

On obtient quasiment la même chose.

3. Lien avec la formule vue en Seconde :

- a. Rappeler cette formule et pourquoi on ne peut pas toujours l'utiliser.

Si $0,2 < p < 0,8$ et si $n > 25$, on peut utiliser : $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

- b. On considère un jeu où on lance un dé à quatre faces 50 fois. Déterminer l'intervalle de fluctuation du nombre de numéro 1 sortis par la formule de Seconde et par la méthode de la question précédente (on considère le dé bien équilibré). Obtient-on les mêmes résultats ?

Cela donne : $I = [0,109 ; 0,391]$ pour un intervalle en fréquence, ce qui donne en effectif : $I = [5,4 ; 19,6]$ soit $I = [5 ; 20]$

Avec la méthode précédente, on trouve : $I = [7 ; 19]$

L'intervalle obtenu par la formule de Seconde sera toujours « un peu plus grand » que celui obtenu par la loi binomiale.

4. Un algorithme à programmer dans la calculatrice :

- a. Voici un algorithme : que fait-il ?

Cet algorithme donne la plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k) < 0,025$, c'est à dire la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation.

Entrée(s) :	saisir N saisir P
Traitement :	Tant que $P(X \leq k) < 0,025$ Faire $k + 1 \rightarrow k$ Fin de Tant que
Sortie(s) :	Afficher k
Traitement :	Tant que $P(X \leq k) < 0,975$ Faire $k + 1 \rightarrow k$ Fin de Tant que
Sortie(s) :	Afficher k

- b. Complétez-le pour obtenir les deux bornes de l'intervalle de fluctuation par la loi binomiale. Vous pouvez le saisir dans la calculatrice.

```
NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP
PROGRAM:FLUCTU
:Prompt N,P
:0→K
:While binomFRép(N,P,K)<0.
025
:K+1→K
:End
:Disp K
:While binomFRép(N,P,K)<0.
975
:K+1→K
:End
:Disp K
```