

Chapitre 9

Produit scalaire de l'espace

Objectifs du chapitre :

<i>item</i>	<i>références</i>	<i>auto évaluation</i>				
calculs de produits scalaires						
équation cartésienne d'un plan						
intersection de droites et de plan						

1) Produit scalaire dans l'espace

1 - 1) Approche géométrique du produit scalaire

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C .

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Ainsi,

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

* Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul : $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

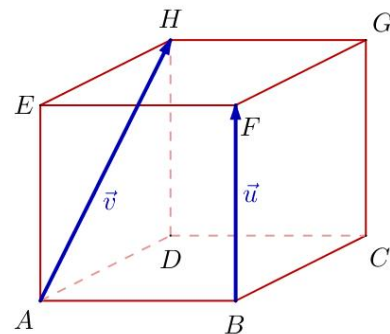
EXEMPLE :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .

Notons $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} \\ &= BF \times BG \times \cos(\widehat{FBG}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$



Propriétés :

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

(2) Si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k un réel, alors :

$$* \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad * \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad * \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

EXEMPLE :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .

* Comme dans le plan (AGC) , C est le projeté orthogonal de G sur (AC) :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

* Pour calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG}$, on peut remplacer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ par la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + a^2 = a^2$$

1 - 2) Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Propriété :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace.

le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul

si, et seulement si

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$$

Définition :

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** lorsque leur **produit scalaire est nul**.

Deux droites $\mathcal{D}$ et Δ sont **orthogonales** lorsque leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{D} \perp \Delta$.

REMARQUE :

Deux droites **orthogonales** de l'espace sont dites **perpendiculaires** si elles appartiennent au même plan.

La géométrie plane ne fait pas la distinction entre ces deux mots.

1 - 3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Dans un repère **orthonormé** $(O; I; J; K)$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

DÉMONSTRATION :

Soit $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

On a : $\vec{i} \cdot \vec{i} = OI \times OI \times \cos(0) = 1$

De même, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant deux à deux orthogonaux, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j} + zz' \vec{k} \cdot \vec{k} + (xy' + x'y) \vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + x'z) \vec{i} \cdot \vec{k} + (yz' + y'z) \vec{j} \cdot \vec{k},$$

ce qui donne finalement $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

EXEMPLE :

En reprenant le cube présenté précédemment, on considère le repère orthonormé $(A; I; J; K)$ avec $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

* Dans ce repère orthonormé, $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(a; a; a)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(a; a; 0)$.

Le calcul de $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$ s'obtient par : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = a.a + a.a + a.0 = 2a^2$

* Dans ce repère orthonormé, $\overrightarrow{BF}$ a pour coordonnées $(0; 0; a)$ et $\overrightarrow{AG}$ $(a; a; a)$.

Ainsi, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG} = 0.a + 0.a + a.a = a^2$

2) Applications du produit scalaire

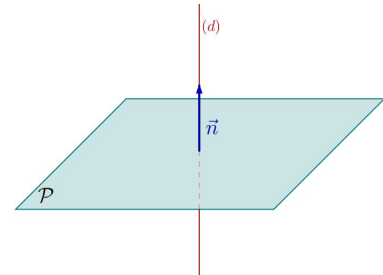
2 - 1) Vecteur normal à un plan

Puisque toutes les droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, ce qui justifie la définition suivante :

Définition :

Un vecteur $\vec{n}$ est dit orthogonal à un plan si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Ce vecteur est alors appelé **vecteur normal** au plan.



Théorème :

une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan $\mathcal{P}$, si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

DÉMONSTRATION - BAC :

Si (d) est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$, elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) .

Réciproquement, si $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs directeurs, respectivement des droites (d) , (d_1) et (d_2) , $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$ puisque (d) est orthogonale à (d_1) et (d_2) .

Soit Δ une droite du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ .

Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan $\mathcal{P}$: il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$

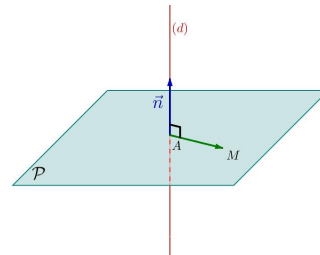
On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc que la droite (d) est orthogonale à la droite Δ .

2 - 2) Équations cartésiennes d'un plan

Propriété :

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



DÉMONSTRATION :

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{n}$.

La droite (AM) est alors une droite du plan $\mathcal{P}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Alors M est confondu avec A ou (AM) est orthogonale à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$, c'est-à-dire que M appartient au plan contenant A et orthogonal à (d) .

Propriété :

Dans un repère orthonormé, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$

Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble (E) des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

DÉMONSTRATION - BAC :

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

M appartient à $\mathcal{P}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit à

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient une écriture de la forme $ax + by + cz + d = 0$

Réciproquement, on veut montrer qu'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant la relation (E) : $ax + by + cz + d = 0$ appartient à un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

L'idée est d'utiliser la propriété précédente; il nous faut un point A vérifiant la relation $ax + by + cz + d = 0$. Puisque a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, on peut supposer par exemple que a est non nul.

Le point A de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à l'ensemble (E) .

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$, ce qui revient à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}(a; b; c)$

(E) est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$