

Chapitre 7

Les nombres complexes

Objectifs du chapitre :

<i>item</i>	<i>références</i>	<i>auto évaluation</i>				
forme algébrique d'un nombre complexe						
résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$						
forme exponentielle d'un nombre complexe						
interprétation géométrique d'un nombre complexe						

1) L'ensemble $\mathbb{C}$

1 - 1) Définition et vocabulaire

Théorème et définitions :

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$ et appelé **ensemble des nombres complexes**, possédant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
2. on définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication des réels ;
3. il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$;
4. tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** $z = x + iy$, avec x et y réels.

Définition :

L'écriture $z = x + iy$, avec x et y réels est la **forme algébrique** (on dit aussi l'écriture algébrique) du nombre complexe z .

x est la **partie réelle** de z : elle est noté $Re(z)$.

y est la **partie imaginaire** de z : elle est noté $Im(z)$.

EXEMPLES :

* $z = -4 + 5i : Re(z) = -4$ et $Im(z) = 5$

* $z = \sqrt{3} : Re(z) = \sqrt{3}$ et $Im(z) = 0$

* $z = \frac{2}{3}i : Re(z) = 0$ et $Im(z) = \frac{2}{3}$

REMARQUES :

* Lorsque $y = 0$, z est réel.

* Lorsque $x = 0$, $z = iy$ (avec y réel), z est **imaginaire pur**.

* 0 est le seul complexe à la fois réel et imaginaire pur.

1 - 2) Opérations dans $\mathbb{C}$

Pour effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$, il suffit d'utiliser $i^2 = -1$ et les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$. Soit deux nombres complexes écrits sous la forme algébrique :

$$z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy', \text{ avec } x, y, x' \text{ et } y' \text{ réels.}$$

Somme de deux nombres complexes :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

Produit de deux nombres complexes :

$$zz' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Inverse d'un nombre complexe non nul :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Ce dernier résultat se retrouve en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{x + iy}$ par $x - iy$. Ensuite, on utilise l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ et $i^2 = -1$.

Quotient de deux nombres complexes :

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} = (x + iy) \times \frac{1}{x' + iy'}$$

1 - 3) Égalité de deux nombres complexes

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

REMARQUES :

* Un cas particulier important : $z = 0$ si, et seulement si, $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

* Cette propriété est une conséquence de l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.

En effet, si $z = x + iy$ est égal à $z' = x' + iy'$, alors :

$z - z' = x - x' + i(y - y') = 0$; le nombre $z - z'$ a donc pour partie réelle 0, ce qui donne : $x - x' = 0$ soit $x = x'$.

De même, ce nombre $z - z'$ a pour partie imaginaire 0, ce qui donne $y - y' = 0$, soit $y = y'$.

Au final, on a bien montré que si $z = z'$, alors ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Réciproquement, il est évident que si deux nombres complexes ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, ils sont égaux.

2) Conjugué et équations du second degré

2 - 1) Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = x + iy$

Le nombre complexe $x - iy$ est appelé **conjugué de z** et noté $\bar{z}$; ainsi, $\bar{z} = x - iy$.

EXEMPLES :

$$\overline{3 - 2i} = 3 + 2i; \quad \overline{5} = 5; \quad \overline{5i} = -5i$$

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

2. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

3. pour n entier naturel, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

4. si z est non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$

5. $z\bar{z} = (x + iy)(x' + iy') = x^2 + y^2$
Le nombre $z\bar{z}$ est un réel positif ou nul.

6. z est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué.

$$z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

7. z est imaginaire pur si, et seulement si, il est égal à l'opposé de son conjugué.

$$z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION :

1. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$:

$$\overline{z + z'} = \overline{(x + iy) + (x' + iy')} = \overline{(x + x') + i(y + y')} = x + x' - i(y + y')$$

Or, $\overline{z} + \overline{z'} = (x - iy) + (x' - iy') = x + x' - i(y + y')$, donc $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

On procède de même pour démontrer les propriétés 2. et 4.

3. La preuve peut se faire grâce à un raisonnement par récurrence.

6. Soit $z = x + iy$; z réel équivaut à $y = 0$.

$z = \overline{z}$ équivaut à $x + iy = x - iy$, c'est-à-dire $y = 0$, ce qui montre l'équivalence.

2 - 2) Équations du second degré à coefficient réel

Théorème :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, dont l'inconnue z est un nombre complexe, et **les coefficients a , b et c sont des réels**, avec $a \neq 0$.

On note Δ **le réel $b^2 - 4ac$** , appelé discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions **réelles** :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution **réelle** : $\frac{-b}{2a}$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions **complexes conjuguées** :

$$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

DÉMONSTRATION :

Pour le cas $\Delta \geq 0$:

On retrouve les résultats prouvés en classe de 1^{ère}. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, les solutions restent les mêmes dans $\mathbb{C}$.

Pour le cas $\Delta < 0$:

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Si $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et donc $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$

$$\text{On a alors : } az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

On peut alors factoriser cette expression : $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$

Cette forme factorisée permet d'en déduire les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

EXEMPLE :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$

$\Delta = -64$, soit $(8i)^2$; l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 3 + 4i$$

3) Représentation géométrique

3 - 1) Affixe d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Il est ainsi appelé **plan complexe**.

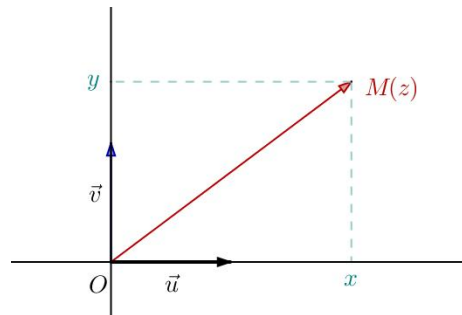
Définition :

A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe dans le plan complexe un point M , et un seul, de coordonnées $(x; y)$.

Réciproquement, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan complexe, on associe le nombre complexe unique $z = x + iy$.

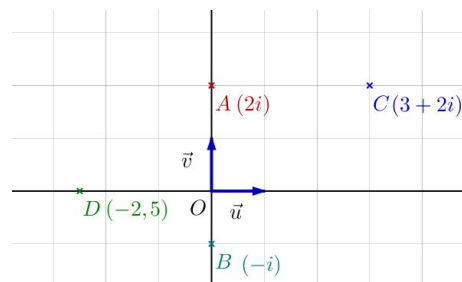
z est appelé **affixe** du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le point M est appelé **le point image** de z .



EXEMPLES :

- Le point A d'affixe $2i$ a pour coordonnées $(0; 2)$.
- Le point B d'affixe $-i$ a pour coordonnées $(0; -1)$.
- Le point C d'affixe $3 + 2i$ a pour coordonnées $(3; 2)$.
- Le point D d'affixe $-2,5$ a pour coordonnées $(-2,5; 0)$.



Propriétés :

(1) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

(2) $z_{\overrightarrow{w+\overrightarrow{w'}}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$

(3) $z_{k\overrightarrow{w}} = k z_{\overrightarrow{w}}$, avec k réel

(4) Soit I le milieu de $[AB]$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

DÉMONSTRATIONS :

(1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$, donc :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

On a bien $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Les propriétés (2), (3) et (4) se démontrent de la même manière avec les coordonnées des vecteurs ou des points.

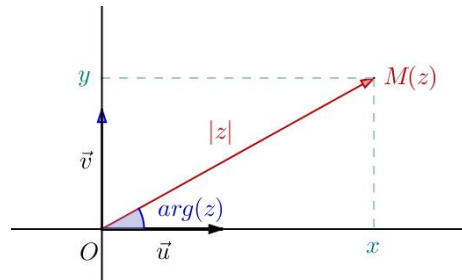
3 - 2) Module et argument d'un nombre complexe

Définitions :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et M le point d'affixe z .

Le **module** de z , noté $|z|$ est la distance OM , c'est-à-dire le nombre réel $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Un **argument** de z (avec z **non nul**), noté $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$



EXEMPLES :

* $|3 - 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

* $1 + i$ est sur la première bissectrice : il a pour argument $\frac{\pi}{4}$.

REMARQUES :

* $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.

* Le réel 0 n'a pas d'argument, car l'angle n'est pas défini si M est en O .

Propriétés :

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$

(2) Tout réel strictement positif a un argument égal à 0.

(3) Tout réel strictement négatif a un argument égal à π .

(4) Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$, et tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATIONS :

(1) avec $z = x + iy$, $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

d'autre part, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (i^2)y^2 = x^2 + y^2$

(2) , (3) et (4) se « contrôlent » à l'aide d'un schéma sur un repère.

Propriétés :

(1) Pour tous points A et B d'affixe z_A et z_B , $AB = |z_B - z_A|$

(2) Pour tous points A et B distincts d'affixe z_A et z_B :

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

DÉMONSTRATIONS :

(1) Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$; alors M a pour affixe $z_B - z_A$; or, $OM = AB$ donc $AB = |z_B - z_A|$

(2) $(\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

4) Forme trigonométrique et propriétés sur module et argument

4 - 1) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition :

Pour tout nombre complexe z non nul, $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** d'un nombre complexe.

EXEMPLES :

* $i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$ car $|i| = 1$ et $\arg i = (\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

* $-3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$ car $|-3| = 3$ et $\arg(-3) = (\vec{u} ; -\vec{u}) = -\pi$

Comme l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique est unique, il existe un lien entre les formes trigonométriques et algébriques.

Propriété :

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$, avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$. Alors ;

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

EXEMPLES :

* Soit z_1 le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$; il s'écrit :

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 1 - i$$

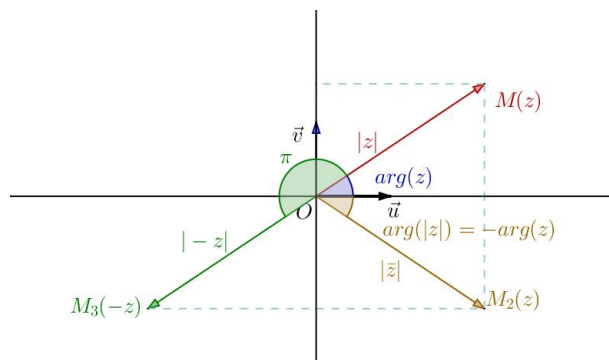
* Soit le complexe $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; son module est égal à $\sqrt{1+3} = 2$.

Si l'on note θ un argument de z_2 , on aurait : $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

4 - 2) Propriétés sur les modules et les arguments**Propriétés :**

Pour tout nombre complexe z non nul :

- (1) $|\bar{z}| = |z|$
- (2) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- (3) $|-z| = |z|$
- (4) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



Propriétés :

(1) **Somme** : pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

(2) **Produit** : pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

(3) **Puissance** : pour tous nombres complexes z et z' non nuls, et pour tout n non nul de $\mathbb{N}$:

$$|z^n| = |z|^n \text{ et } \arg(z^n) = n \arg(z) + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

(4) **Quotient** : pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \text{ et } \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

DÉMONSTRATIONS :

(1) L'inégalité sur les modules traduit l'inégalité triangulaire sur les distances vue au collège.

En notant M et M' les points d'affixe z et z' , on a : $OM = |z|$, $OM' = |z'|$ et $M'M = |z - z'|$

L'inégalité triangulaire donne : $MM' \leq OM + OM'$, soit : $|z - z'| \leq |z| + |z'|$

En remplaçant $-z'$ par z'' , on obtient : $|z + z''| \leq |z| + |-z''|$; or, $|-z''| = |z''|$

Soit au final, $|z + z''| \leq |z| + |z''|$

(2) On écrit z et z' sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \text{ et } z' = r'(\cos\theta' + i \sin\theta') \text{ avec } r > 0 \text{ et } r' > 0$$

Alors : $zz' = r(\cos\theta + i \sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i \sin\theta')$; après calculs, on obtient :

$$zz' = rr'[(\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta') + i(\sin\theta \cos\theta' + \sin\theta' \cos\theta)]$$

En utilisant les formules d'additions sur les cosinus et les sinus, cela donne :

$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$: cela montre que zz' a pour module rr' et pour argument $\theta + \theta'$, ce qui prouve le résultat proposé.

(3) La preuve peut se faire par un raisonnement par récurrence.

(4) On pose $Z = \frac{z'}{z}$; Ainsi, $z' = zZ$ et on applique les résultats donnés en (2).

5) Notation exponentielle et applications

5 - 1) Notation exponentielle

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors, $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$ (d'après une propriété vue précédemment)

Ainsi, la fonction f vérifie la relation fonctionnelle des fonctions exponentielles.

Si on admet que les règles de dérivation sont applicables aux fonctions à valeurs complexes, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et alors, pour tout réel θ , on peut écrire :

$$f'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta$$

D'où $f'(\theta) = i(i \sin \theta + \cos \theta) = i f(\theta)$; par ailleurs, $f(0) = 1$.

Pour ces raisons, on adopte la définition suivante :

Définition :

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

EXEMPLES :

$$e^{i\pi} = -1; e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

REMARQUES :

* $|e^{i\theta}| = 1$

* $\arg(e^{i\theta}) = \theta$

* $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$

Propriétés :

Pour tous réels θ et θ' :

$$(1) e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(2) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$(3) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(4) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

5 - 2) Applications

Trigonométrie

Les formules (1) et (3) permettent de retrouver les formules d'addition et de duplication en réécrivant les égalités à l'aide des formes algébriques. On obtient alors :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$$

$$\sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'$$

$$\sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$$

On obtient également :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Propriété :

Pour tout réel θ ,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de remarquer que $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ et d'effectuer les calculs dans les écritures fractionnaires proposées.

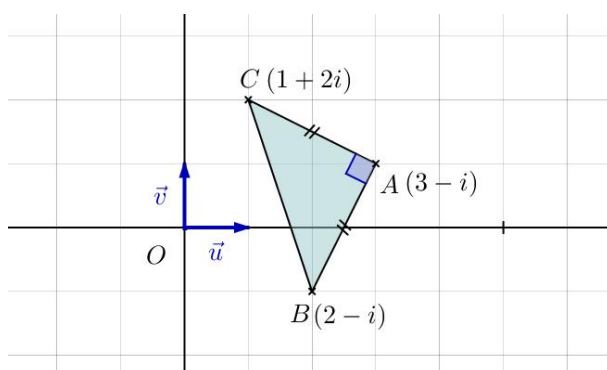
Les nombres complexes permettent de résoudre des problèmes de géométrie

EXEMPLE :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i, z_B = 2 - i \text{ et } z_C = 1 + 2i$$

On va montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A .



Un travail sur les modules donnera des renseignements sur les longueurs ; un travail sur les arguments donnera des renseignements sur les angles.

On veut prouver que $AB = AC$; en terme de module, cela revient à $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$; c'est pourquoi on est amené à calculer les expressions des nombres complexes $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$; pour se faciliter la tâche, on calculera le rapport des deux, c'est-à-dire $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

$$\text{Ainsi, } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - i - 3 - i}{1 + 2i - 3 - i} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{(-1 - 2i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{2 + i + 4i + 2i^2}{5} = i$$

Module :

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = |i| = 1 ; \text{ comme } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC}, \text{ on obtient : } AB = AC$$

Argument :

$$\begin{aligned} \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) \\ &= (\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{AC}) \\ &= (\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} ; \vec{u}) \\ &= (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

$$\text{Or, } \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \text{ d'où } (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

Le triangle ABC est tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$; c'est bien un triangle rectangle isocèle en A .

REMARQUE :

On aurait très bien pu résoudre le problème proposé par des méthodes « classiques » de géométrie, mais l'utilisation des nombres complexes est particulièrement efficace.