Chapitre 6

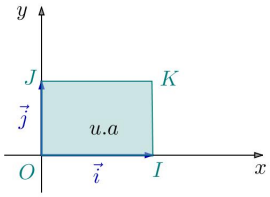
Calcul intégral

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
intégrale et aire sous la courbe						
détermination de primitives de fonctions						
propriétés de l'intégrale						
valeur moyenne d'une fonction						

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

En posant $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, l'aire du rectangle $OIJK$ définit **l'unité d'aire** (u.a).



1) Intégrale d'une fonction continue et positive

1 - 1) Aire sous la courbe et intégrale

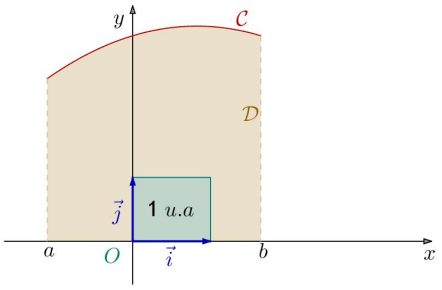
Dans tout ce paragraphe, f et g désignent des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$. $\mathcal{C}$ désigne la représentation graphique de f.

Définition : Intégrale d'une fonction positive

L'intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est égale à l'aire exprimée en unités d'aires, du domaine $\mathcal{D}$, délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On parle aussi d'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[a; b]$.

Représentation graphique



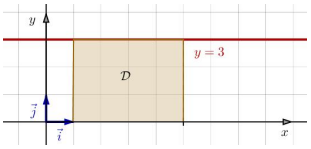
Commentaires

* $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit aussi : « somme de a à b de $f(x)\,dx$ »

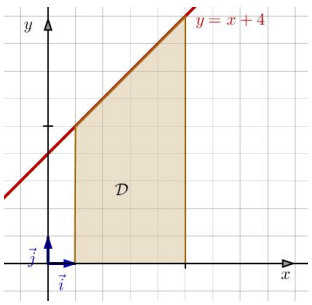
* x est une variable muette : elle n'intervient pas dans le résultat.
On peut la remplacer par une autre lettre, par exemple t ou u :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

Remarques



* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ car $\mathcal{D}$ est alors réduit à un segment.



* $\int_1^5 3\,dx = (5-1) \times 3 = 12$ u.a car $\mathcal{D}$ est un rectangle de dimensions 4 sur 3.

* $\int_1^5 x + 4\,dx = (5-1) \times \dfrac{5+9}{2} = 28$ u.a car $\mathcal{D}$ est un trapèze rectangle de hauteur 4, de petite base 5 et de grande base 9.

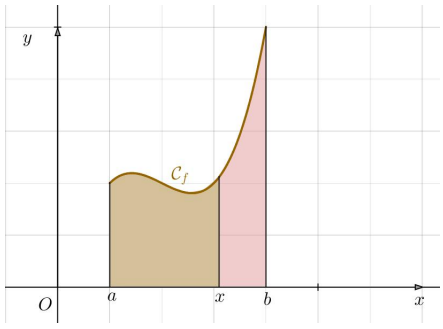
1 - 2) Dérivabilité d'une fonction « aire »

Soit f une fonction continue et positive définie sur un intervalle $[a;b]$ et x un nombre réel quelconque de cet intervalle.

L'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ est l'aire de la partie du plan colorée en marron, qui dépend de la valeur de x.

Pour $x = b$, cette quantité vaut $\int_a^b f(t)\,dt$, c'est-à-dire l'aire délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Représentation graphique



Théorème

Si f est une fonction **continue et positive** sur l'intervalle $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée est la fonction f.

Démonstration :

Ce théorème est admis dans le cas général.

On le démontre ici pour une fonction continue, positive **et croissante**.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

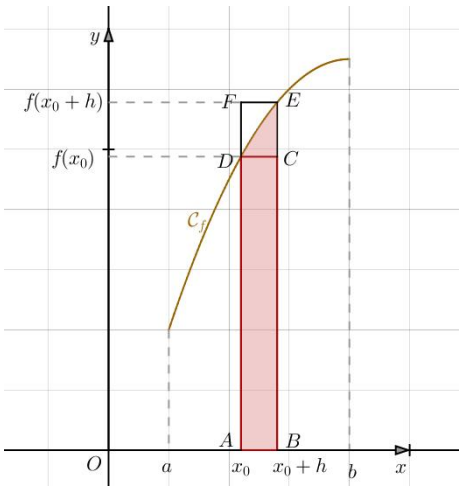
L'idée est de démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f, c'est pourquoi on s'intéresse au **taux de variation** de F en une valeur quelconque de x que l'on note x_0, avec $x_0 \in [a;b]$

Pour x_0 fixé, calculons $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$, avec $h \neq 0$, $x_0 \in [a;b]$ et $x_0 + h \in [a;b]$.

Premier cas : h est strictement positif, ce qui veut dire que : $a \leq x_0 < x_0 + h \leq b$

$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses, et la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[a; x_0+h]$

$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses, et la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[a; x_0]$



La différence $\Delta = F(x_0+h) - F(x_0)$ est donc l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équations $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.

La fonction f étant croissante, on a, pour tout x compris entre x_0 et $x_0 + h$:
$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$

Ceci permet de dire que Δ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ - qui est égale à $h \times f(x_0)$ - et l'aire du rectangle $ABEF$ - qui est égale à $h \times f(x_0 + h)$.

En divisant la double inégalité $h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$ par $h > 0$, on obtient :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Comme la fonction f est continue en x_0, $f(x_0 + h)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0.

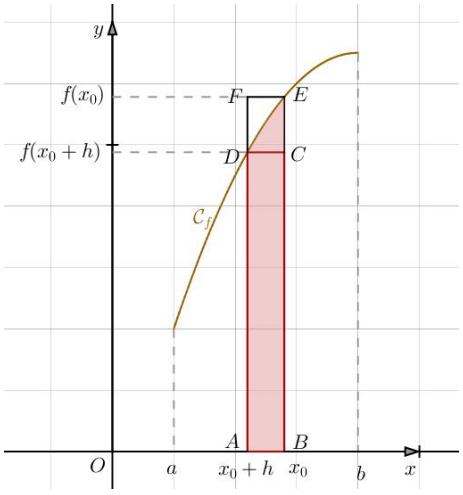
Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Deuxième cas : h est strictement négatif, ce qui veut dire que : $a \leq x_0 + h < x_0 \leq b$

La différence $\Delta = F(x_0 + h) - F(x_0)$ est donc l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équations $x = x_0 + h$ et $x = x_0$.

La fonction f étant croissante, on a, pour tout x compris entre $x_0 + h$ et x_0 :
$f(x_0 + h) \leq f(x) \leq f(x_0)$

Ceci permet de dire que $-\Delta$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ - qui est égale à $-h \times f(x_0 + h)$ - et l'aire du rectangle $ABEF$ - qui est égale à $-h \times f(x_0)$.



En divisant la double inégalité $-h \times f(x_0 + h) \leq -(F(x_0 + h) - F(x_0)) \leq -h \times f(x_0)$ par $-h > 0$, on obtient :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

Comme la fonction f est continue en x_0, $f(x_0 + h)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Conclusion : d'après l'étude des deux cas, la fonction F est dérivable en tout x_0 de $[a; b]$ et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Cela veut dire que sur l'intervalle $[a; b]$, F est dérivable et $F' = f$.

2) Primitives d'une fonction continue

2 - 1) Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Une fonction F définie sur I est une **primitive de f sur I**, si F est dérivable sur I et si sa dérivée est égale à f, soit

$$F' = f$$

Exemple :

Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x^2 - 4 \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - 4x \end{array}$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 3x^2 - 4$.

Propriété

Si une fonction F est une primitive de la fonction f définie sur un intervalle I, alors une fonction G définie sur I par

$$G(x) = F(x) + k, \text{ avec } k \text{ constante réelle,}$$

est également une primitive de f sur I.

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I.

On sait donc que pour tout nombre réel x, $F'(x) = f(x)$.

Soit G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$, avec k constante réelle.

La dérivée de la fonction constante $x \mapsto k$ est la fonction nulle $x \mapsto 0$,
donc $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$, ce qui prouve que G est une primitive de f.

Propriété réciproque

Si F et G sont deux primitives d'une fonction f définie sur un intervalle I, alors il existe un nombre réel k tel que, pour tout nombre réel x appartenant à I, on a :

$$F(x) = G(x) + k$$

Démonstration :

Soit F et G deux primitives de f sur I.

Donc, pour tout nombre réel x de I, on a : $F'(x) = G'(x)$
Soit H la fonction définie pour tout x de I par $H(x) = F(x) - G(x)$.

* H est une fonction continue sur I, car c'est une différence de deux fonctions dérivables (donc continues).

* Pour tout x de I, $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$

Or, si une fonction dérivable sur un intervalle admet une dérivée nulle sur cet intervalle, c'est qu'elle est constante : H est donc du type $H\ :\ x \mapsto k$, avec k une constante réelle.

Ainsi, il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel x de I, $F(x) = G(x) + k$

Exemple :

$$\begin{array}{rccc} F\ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - 4x \end{array} \text{ est une primitive de } \begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x^2 - 4 \end{array}$$

Donc toutes les primitives de la fonction f sont les fonctions

$$\begin{array}{rccc} G\ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - 4x + k \end{array}$$ où k est une constante quelconque.

2 - 2) Primitives des fonctions usuelles

On obtient le tableau suivant par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles :

Fonction $f : x \longmapsto \ldots$	Une primitive $F : x \longmapsto \ldots$	Sur l'intervalle $I = \ldots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ (ou x^{-n}) (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$ $\left(\text{ou } \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\right)$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

2 - 3) Primitives et opérations sur les fonctions

Des opérations sur les fonctions dérivables et de la définition d'une primitive, on déduit :
Théorème :

> Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I.

Exemple :

$x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto sin(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \mapsto x^2 + sin(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x + cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème :

> Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, et λ un nombre, alors λF est une primitive de la fonction λf sur I.

Exemple :

$x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$; donc $x \mapsto 9x^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 18x$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées.

Dans chaque cas, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I.

Fonction f du type ...	Une primitive F du type ...	Conditions
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$ (ou $u'u^{-n}$) (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{-n+1}u^{-n+1}\right)$	Pour tout x de I, $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{u} = u'u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout x de I, $u(x) > 0$.
$u'e^u$	e^u	
$x \longmapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$ $(x \in J)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	Pour tout x de J, $ax+b \in I$. U primitive de u sur I.

Exemples :

* $f(x) = 2x(x^2+7)^4$ est de la forme $u'u^n$, avec $u(x) = x^2+7$ et $n = 4$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{1}{5}(x^2+7)^5$

* $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^3}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = x^2+1$; on remarque que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, car x^2+1 ne s'annule pas.

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}$

* $h(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x^2+3x+5$; on remarque que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, car $2x^2+3x+5$ ne s'annule pas (trinôme de discriminant négatif). Par ailleurs, on vérifie que $2x^2+3x+5 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = ln(2x^2+3x+5)$

* $i(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+3$; on remarque que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, car $x^2+3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de i sur $\mathbb{R}$ est $I(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

* $j(x) = cos(x)e^{sin(x)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = sin(x)$.

Une primitive de j sur $\mathbb{R}$ est $J(x) = e^{sin(x)}$

* $k(x) = cos(2x - \frac{\pi}{3})$ est de la forme $u(ax + b)$ avec $u(X) = cos(X)$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = \frac{1}{2}sin(2x - \frac{\pi}{3})$

2 - 4) Existence de primitives

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

DÉMONSTRATION :

Ce théorème est admis dans le cas général : on le démontre ici pour **une fonction continue sur une intervalle $[a; b]$, et qui admet un minimum sur cet intervalle**.

Premier cas : $m \geqslant 0$

La fonction f est alors continue et positive sur $[a; b]$. On entre dans le cadre de ce qui a été présenté dans ce cours, dans le paragraphe **A** ; la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a; b]$, et $F' = f$.

Il en résulte que f admet bien une primitive F sur $[a; b]$.

Deuxième cas : $m < 0$

Définissons la fonction g sur $[a; b]$ par $g(x) = f(x) - m$

Comme $f(x) \geqslant m$ pour tout x appartenant à $[a; b]$, on déduit que $g(x) \geqslant 0$. La fonction g est ainsi continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

On se retrouve dans le cas précédent ; la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $G' = g$.

Or, $f(x) = g(x) + m$.

La fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une fonction dérivable, dont la dérivée est donnée par $f(x) = g(x) + m$.

Donc la fonction f admet bien une primitive sur $[a; b]$.

Remarques :

* Une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet toujours un minimum sur cet intervalle, mais la preuve dépasse le cadre du programme de Terminale.

* Dans certains cas, il n'est pas possible d'écrire les primitives à partir des fonctions connues comme les fonctions polynômes, l'exponentielle, le logarithme népérien ... C'est le cas pour la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui sera utilisée en probabilité pour décrire la loi normale.

2 - 5) Calcul d'intégrales

Propriété et notation

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

On note : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 4$ qui est continue et positive sur l'intervalle $[1;5]$.

Une primitive de f est F, définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

$\int_1^5 t + 4\,dt = [F(t)]_1^5 = F(5) - F(1) = \left(\frac{1}{2} \times 5^2 + 4 \times 5\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 + 4 \times 1\right)$
$= \frac{25}{2} + 20 - \frac{1}{2} - 4 = 28$

On retrouve le résultat déterminé par un calcul d'aire dans l'exemple du premier paragraphe de ce cours.

Démonstration :

D'après ce qui a été vu précédemment, si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

Si F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, il existe un réel k tel que, pour tout réel x de $[a;b]$, $G(x) = F(x) + k$.

Alors, $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + k$. Comme $G(a) = F(a) + k$ et que $G(a) = 0$, alors $k = -F(a)$

D'où, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$; en particulier, pour $x = b$, on obtient la relation recherchée.

3) Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

3 - 1) Le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$

* Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

* Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I, il existe un réel k tel que, pour tout x de I, $F(x) = G(x) + k$.

* On a : $F(b) - F(a) = (G(b) - k) - (G(a) - k) = G(b) - G(a)$, où a et b sont deux réels quelconques de I.
La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Défintion, propriété :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux nombres réels de cet intervalle, et F une primitive de f sur cet intervalle.
>
> L'intégrale de f sur l'intervalle $[a;b]$ est le nombre $F(b) - F(a)$.

Exemples :

f positive sur un intervalle $[a;b]$

$\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f sur $[a;b]$.
$F(b) - F(a)$ permet de calculer cette aire.

f négative sur un intervalle $[a;b]$

En considérant $g = -f$ et sa primitive $G = -F$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -(G(b) - G(a)) = -\int_a^b g(t)\,dt$$

Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,dt$ correspond à l'opposé de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f sur $[a;b]$.

Remarque :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et x deux nombres réels de I, et F une primitive de F sur I.

Comme $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et a pour dérivée f.

Ceci permet de généraliser les résultats vus dans le paragraphe **A** sans l'hypothèse « f positive sur l'intervalle I ».

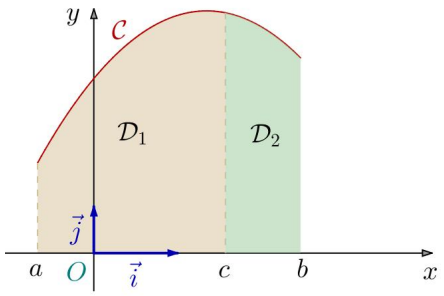
3 - 2) Relation de Chasles

Propriété :

Pour tout réel c de $[a;b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)d\,x$$

Représentation graphique



Démonstration

Soit f une fonction continue sur I, a, b et c des nombres réels de I. On a :

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Commentaire

L'aire du domaine $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est égal à la somme des aires des deux domaines.

4) Propriétés des intégrales

4 - 1) Linéarité de l'intégration

Propriété :

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et λ est un réel quelconque.

Pour tous a et b de I :

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt \qquad \int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

Exemple

$\int_1^6 4x^2+2x-5\,dx = 4\int_1^6 x^2\,dx + 2\int_1^6 x\,dx - \int_1^6 5\,dx$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$, alors λF est une primitive de λf sur $[a;b]$:

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = (\lambda F(a)) - (\lambda F(b)) = \lambda(F(b)-F(a)) = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$$

Soient F et G des primitives de f et g sur $[a;b]$; alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = ((F+G)(b)) - (F+G)(a)) = (F(b)+G(b)) - (G(a)+F(a))$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

4 - 2) Intégrales et inégalités

Positivité :

Si pour tout réel x de $[a;b]$, on a $f(x) \geq 0$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Commentaire

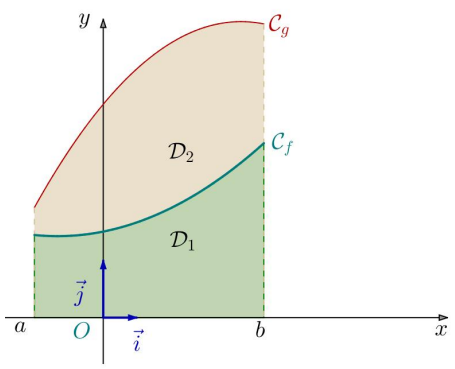
Cette propriété provient directement de l'interprétation d'une intégrale d'une fonction continue et positive comme « l'aire sous la courbe ».

Ordre :

Si pour tout réel x de $[a;b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Représentation graphique



Démonstration

Pour tout x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$. On définit h sur l'intervalle $[a;b]$ par : $h(x) = g(x) - f(x)$.

Ainsi, $h(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ et donc $\int_a^b h(t)\,dt \geq 0$

En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt$$

Ainsi, $\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geq 0$, ce qui prouve la propriété.

Commentaire

Sur le graphique ci-dessus, on considère deux fonctions continues et positives. Le domaine $\mathcal{D}_1$ est inclus dans le domaine $\mathcal{D}_2$. Donc l'aire de $\mathcal{D}_1$ est inférieure à l'aire de $\mathcal{D}_2$.

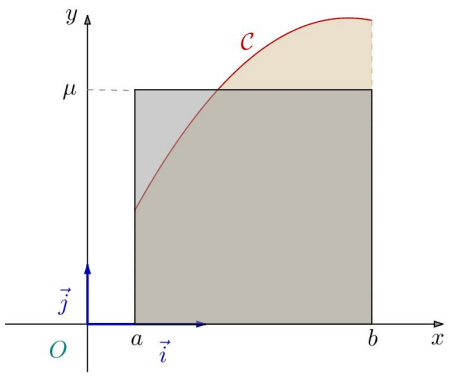
4 - 3) Valeur moyenne

Définition :

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Représentation graphique



Commentaire

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[a;b]$.

Numériquement, cette interprétation graphique se traduit par : $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx$

4 - 4) Inégalité de la moyenne

Propriété :

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

S'il existe deux nombres réels M et m tels que, pour tout réel x de $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$$

Autre Formulation

En divisant cette inégalité par $b-a$, on obtient : $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant M$

Cela revient à : $m \leqslant \mu \leqslant M$, avec μ la valeur moyenne de la fonction sur $[a;b]$.

Démonstration

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et M un réel tel que pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq M$

On applique le résultat de la propriété dite « d'ordre » aux fonctions f et $g(x) = M$

Cela donne : $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt$

Or, $\int_a^b M\,dt = M \times (b-a)$, d'où : $\int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

On procède de même pour montrer l'autre inégalité.