Chapitre 5

Fonction logarithme népérien

Objectifs du chapitre :

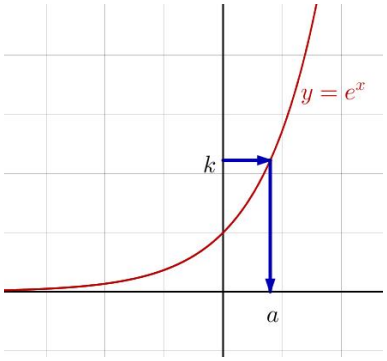
item	*références*	*auto évaluation*				
fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle						
propriétés numériques de la fonction logarithme népérien						
calculs de limites avec la fonction logarithme népérien						
étude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien						
résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien						

1) La fonction logarithme népérien

1 - 1) Introduction et définition

En ayant étudié la fonction exponentielle, on a vu qu'il s'agissait d'une fonction continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que e^x est strictement positif.

En conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, quel que soit le réel **strictement positif** k, l'équation $e^a = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.



Définitions :

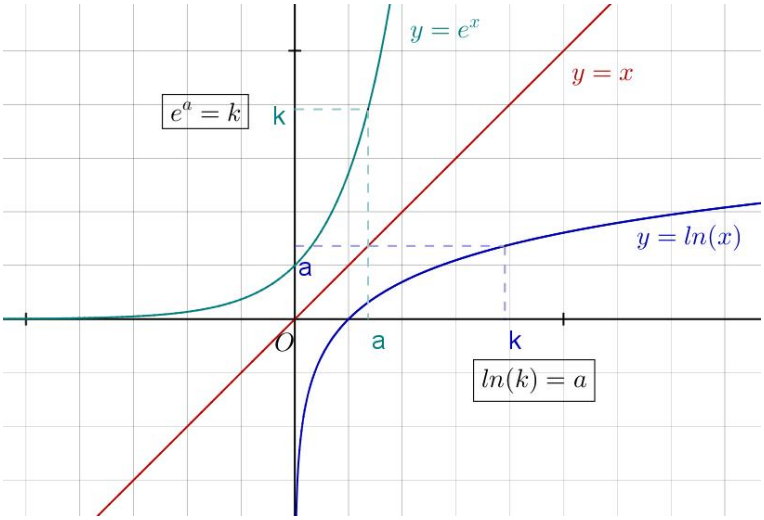
(1) On appelle **logarithme népérien** du réel strictement positif k, l'unique solution de l'équation d'inconnue a : $e^a = k$. On note cette solution $ln(k)$ qui se lit « logarithme népérien de k ».

(2) La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe $y = ln(x)$

$y = ln(x)$ et $x > 0$	équivaut à	$e^y = x$

On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Les courbes représentatives des fonctions ln et exponentielles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



1 - 2) Propriétés

Propriétés :

(1) La fonction ln est **définie** et **continue** sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

(2) Pour tout réel x, $\boxed{ln\,(e^x) = x}$

(3) Pour tout réel x strictement positif ; $\boxed{e^{ln\,x} = x}$

(4) $\boxed{ln\,1 = 0}$ et $\boxed{ln\,e = 1}$

(5) La fonction ln est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $\boxed{ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$

(6) La fonction ln est **strictement croissante** sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

(7) $0 < x < 1$ équivaut à $ln\,x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $ln\,x > 0$

(8) Pour tous réels a et b strictement positifs,

$\boxed{a = b \text{ équivaut à } ln\,a = ln\,b}$ et $\boxed{a < b \text{ équivaut à } ln\,a < ln\,b}$

DÉMONSTRATIONS :

(1) propriété admise.

(2) et (3) viennent de la définition donnée en introduction.

(4) c'est un cas particulier des propriétés (2) et (3).

(5) Soit $a \in]\,0\,;\,+\infty\,[$; on cherche $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{ln\,x - ln\,a}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} r(x)$, en notant $r(x) = \dfrac{ln\,x - ln\,a}{x - a}$

On pose $X = ln\,x$ et on cherche à transformer l'écriture précédente en faisant apparaître la fonction exponentielle dont on connaît des propriétés.

$$r(x) = \frac{ln\,x - ln\,a}{x - a} = \frac{ln\,x - ln\,a}{e^{ln\,x} - e^{ln\,a}} = \frac{1}{\dfrac{e^{ln\,x} - e^{ln\,a}}{ln\,x - ln\,a}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to a} ln\,x = ln\,a$ par continuité de la fonction ln.

Par ailleurs : $\lim\limits_{X\to ln\,a} \dfrac{e^X - e^{ln\,a}}{ln\,x - ln\,a} = e^{ln\,a}$ par définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en $ln\,a$.

D'après le théorème des limites des fonctions composées, on obtient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{ln\,x} - e^{ln\,a}}{ln\,x - ln\,a} = e^{ln\,a}$,

donc $\lim\limits_{x\to a} r(x) = \dfrac{1}{e^{ln\,a}} = \dfrac{1}{a}$

Ceci montre que la fonction ln est dérivable pour tout réel $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

(6) La fonction ln est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est strictement positive sur cet intervalle.

(7) et (8) viennent de la stricte croissance de la fonction ln sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2) Relation fonctionnelle

Théorème :

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\boxed{ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)}$

DÉMONSTRATION :

$e^{ln(a\times b)} = a \times b$ et $e^{ln\, a + ln\, b} = e^{ln\, a} \times e^{ln\, b} = a \times b$

Donc $e^{ln(a\times b)} = e^{ln\, a + ln\, b}$, ce qui prouve que $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$

EXEMPLES :

* $ln\ 15 = ln(3 \times 5) = ln\ 3 + ln\ 5$

* $ln\ 10 - ln\ 14 = ln(2 \times 5) - ln(2 \times 7) = ln\ 2 + ln\ 5 - ln\ 2 - ln\ 7 = ln\ 5 - ln\ 7$

* Pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $ln(x-1) + ln(x+1) = ln[(x-1)(x+1)] = ln(x^2 - 1)$

Propriétés :

(1) Pour tout entier naturel n et tout réel a strictement positif, $\boxed{ln\,(a^n) = n\ ln\ a}$

(2) Pour tout réel b strictement positif, $\boxed{ln\frac{1}{b} = -ln\ b}$

(3) Pour tous réels strictement positifs a et b, $\boxed{ln\frac{a}{b} = ln\ a - ln\ b}$

(4) Pour tout entier naturel n et tout réel a strictement positif, $\boxed{ln\,(a^{-n}) = -n\ ln\ a}$

(5) Pour tout réel a strictement positif, $\boxed{ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} ln\ a}$

DÉMONSTRATIONS :

(1) On démontre cette propriété par récurrence.

initialisation : pour $n = 0$, on a $ln\ a^n = ln\ a^0 = ln\ 1 = 0$ et $n\ ln\ a = 0$: la propriété est vérifiée au rang 0.

hérédité : on suppose qu'il existe un entier p tel que $ln\ a^p = p\ ln\ a$

$$\begin{aligned} ln\ a^{p+1} &= ln(a \times a^p) \\ &= ln\ a \times ln\ a^p \\ &= ln\ a + ln\ a^p && \text{d'après la relation fonctionnelle} \\ &= ln\ a + p\ ln\ a && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (p+1) ln\ a \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, on en conclut que $ln\,(a^n) = n\ ln\ a$ pour tout entier naturel n.

(2) On a $\frac{1}{b} \times b = 1$ donc $ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = ln\ 1 = 0$; ainsi, $ln\left(\frac{1}{b}\right) + ln\ b = 0$, et donc $ln\frac{1}{b} = -ln\ b$

(3) On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, donc $ln\frac{a}{b} = ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = ln\ a + ln\frac{1}{b} = ln\ a - ln\ b$

(4) a^{-n} peut s'écrire $\frac{1}{a^n}$, donc $ln\,(a^{-n}) = ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = ln\ 1 - ln\ a^n = 0 - ln\ a^n = -n\ ln\ a$

(5) On a $2\ ln\,(\sqrt{a}) = ln\left((\sqrt{a})^2\right) = ln\ a$, donc $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln\ a$

Exemples :

* $ln\ 36 - ln\ 9 = ln(6^2) - ln(3^2) = 2\ ln\ 6 - 2\ ln\ 3 = 2(ln\ 6 - ln\ 3) = 2\ ln\left(\frac{6}{3}\right) = 2\ ln\ 2$

* $E = 2\ ln\ 7 - (ln\ 2 + 2\ ln\ 5) = ln\ 7^2 - (ln\ 2 + ln\ 5^2) = ln\ 49 - ln(2 \times 5^2) = ln\ 49 - ln\ 50$

* Pour $a \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $ln\ a^7 + 2\ ln\ a^{-3} = 7\ ln\ a + 2 \times (-3) ln\ a = 7\ ln\ a - 6\ ln\ a = ln\ a$

3) Étude des limites liées à la fonction ln

3 - 1) Limites aux bornes

Propriétés :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\ x = +\infty$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} ln\ x = -\infty$

DÉMONSTRATIONS :

(1) On utilise la définition de la limite égale à $+\infty$ en $+\infty$:

Soit A un réel strictement positif, on doit trouver un réel a tel que, si $x > a$, alors $ln\ x > A$.

Si on choisit $a = e^A$, alors $x > a = e^A$ entraîne, par la stricte croissance de la fonction ln, $ln\ x > ln\ a$

Or, $ln\, a = ln\ e^A = A$, ce qui revient à écrire : $x > a$ entraîne $ln\ x > A$; ceci prouve bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

(2) On va utiliser le résultat précédent, en utilisant le fait que, pour tout réel x strictement positif : $ln\ x = -ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$; comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} = ln\ X$ (par composition des limites)

En utilisant la propriété (1), on obtient que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

On en conclut que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} ln\ x = -\infty$ (par la règle sur la limite d'un produit)

3 - 2) D'autres limites

Propriétés :

(1) $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1}$ (2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\ x}{x} = 0}$

DÉMONSTRATIONS :

Un calcul direct de ces limites aboutit à une forme indéterminée.

(1) La fonction ln est dérivable en 1. En ce point, le nombre dérivé est 1.

Cela s'écrit : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ln(1+h) - ln\ 1}{h - 0} = 1$, soit encore $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

(2) On va chercher à faire apparaître la fonction exponentielle pour laquelle on a des résultats concernant les limites (on rappelle pour cela que, pour $x > 0$, $x = e^{ln\ x}$) :

$\dfrac{ln\ x}{x} = \dfrac{ln\ x}{e^{ln\ x}}$; on pose $X = ln\ x$

Alors : $\dfrac{ln\ x}{e^{ln\ x}} = \dfrac{X}{e^X}$; or, $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\ x = +\infty$

On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, donc on peut conclure (par composition des limites), que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\ x}{e^{ln\ x}} = +\infty$

Par passage à l'inverse, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\ x}{x} = 0$

EXEMPLE :

En utilisant les résultats précédents, nous allons montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xln\ x = 0$

En effet, $xln\ x = -xln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$; or, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

De plus, comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{ln\ X}{X} = 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xln\ x = 0$

REMARQUE :

La propriété (1) donne $\dfrac{ln(1+h)}{h} \approx 1$ pour des valeurs de h très proches de 0, c'est-à-dire $ln(1+h) \approx h$

4) Fonction $ln\ u$ et logarithme décimal

4 - 1) Fonctions composées avec la fonction ln

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur l'intervalle I.

On considère la fonction composée g définie par $g = ln \circ u$. Cela signifie que pour tout $x \in I$: $g(x) = ln(u(x))$

On peut aussi noter : $g = ln\ u$

Propriété :

La fonction $ln\ u$ est définie sur I et dérivable sur cet intervalle et $\boxed{(ln\ u)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

Commentaire :

Cette propriété est admise.

Exemple :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ln(2x^2 + 1)$

g est bien de la forme $ln\ u$ avec $u(x) = 2x^2 + 1$, donc $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{4x}{2x^2 + 1}$

4 - 2) Fonction logarithme décimal

Définition :

On appelle fonction **logarithme décimal** la fonction notée **log** définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par : $\boxed{log\ x = \dfrac{ln\ x}{ln\ 10}}$

Conséquence :

$log\ 10^n = \dfrac{ln\ 10^n}{ln\ 10} = \dfrac{n\ ln\ 10}{ln\ 10} = n$

Propriétés :

(1) $log\ 10 = 1$ et $log\ 1 = 0$

(2) La fonction log est définie et dérivable sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

(3) Elle est strictement croissante sur cet intervalle.

(4) Pour tous réels a et b strictement positifs, et n un entier quelconque :

$$log(a \times b) = log\ a + log\ b \qquad log\left(\frac{a}{b}\right) = log\ a - log\ b \qquad log\left(a^n\right) = n\ log\ a$$

Démonstrations :

(1) $log\ 10 = \dfrac{ln\ 10}{ln\ 10} = 1$ et $log\ 1 = \dfrac{ln\ 1}{ln\ 10} = \dfrac{0}{ln\ 10} = 0$

(2) Pour tout $x \in]\ 0\ ;\ +\infty\ [$: $log\ x = \dfrac{ln\ x}{ln\ 10} = \dfrac{1}{log\ 10} \times ln\ x$. Or, ln est continue et dérivable sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$, donc log est continue et dérivable sur cet intervalle. De plus, $log'(x) = \dfrac{1}{log\ 10} \times \dfrac{1}{x}$

(3) comme $ln\ 10 > 0$, le calcul précédent de la dérivée de log justifie sa stricte croissance sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

(4) Ces propriétés proviennent directement de celles de la fonction ln..

Utilisation des logarithmes décimaux :

En chimie :

On exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté **pH** ; sa définition est $\boxed{\text{pH} = -log[H_3O^+]}$, où $[H_3O^+]$ est exprimé en $mol\ .\ L^{-1}$

Sur l'échelle de Richter :

La magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule $R = log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, I étant l'intensité du tremblement de terre et I_0 une intensité de référence.

En acoustique :

La puissance d'un son est donnée en **décibels** (noté dB) par $10\ log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, I_0 étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine..

Par cette échelle, **un son qui augmente d'un dB est multiplié par 10** en terme de puissance !

En statistiques :

D'après **la loi de Benford**, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit d est environ égale à $log\left(1 + \dfrac{1}{d}\right)$.

Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à $log\ 2$.

Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.