

Chapitre 1

Suites numériques

Objectifs du chapitre :

<i>item</i>	<i>références</i>	<i>auto évaluation</i>				
effectuer un raisonnement par récurrence						
démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique						
étudier la monotonie d'une suite						
démontrer qu'une suite admet une limite						
déterminer la limite d'une suite						

Dans tout le chapitre, les entiers considérés sont **naturels**, c'est-à-dire **positifs ou nuls**

1) Raisonnement par récurrence

1 - 1) Le principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n , et $n_0 \in \mathbb{N}$

Définition :

On dit que la propriété P est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 lorsque, **si pour un entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.**

Axiome :

Si la propriété $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si P est héréditaire à partir du rang n_0 , alors pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Vocabulaire

Un **axiome** est une propriété admise, qui sert de base à la construction d'une théorie.

Ici, cet axiome est lié à la définition de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

ILLUSTRATION : image de l'escalier

Si on peut :

- accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation) ;
 - et monter d'une marche quelconque à la suivante (propriété d'hérédité) ;
- alors on peut accéder à n'importe quelle marche au-dessus de n_0 .

Le raisonnement par récurrence est souvent utilisé pour démontrer une propriété faisant intervenir des nombres entiers, par exemple pour établir des égalités, ou encore pour étudier des suites définies par récurrence.

1 - 2) Exemple

Soit a un nombre réel, strictement positif; démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + n a$$

Solution :

On note $P(n)$ cette propriété.

1. **initialisation** : pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$: la propriété est vérifiée.
2. **hérédité** : soit $n_0 \in \mathbb{N}$, un entier fixé, et supposons que $P(n_0)$ soit vraie. Montrons que $P(n_0 + 1)$ est vraie.

Autrement dit, on suppose que $(1 + a)^{n_0} \geq 1 + n_0 a$, et on veut montrer que :
 $(1 + a)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0 + 1) a$

On peut partir de l'expression $(1 + a)^{n_0+1}$, essayer de la minorer ; à un moment donné, il faudra utiliser le fait que $(1 + a)^{n_0} \geq 1 + n_0 a$

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n_0+1} &= (1 + a)^{n_0} \times (1 + a) \\ &\geq (1 + n_0 a) \times (1 + a) \\ &\geq 1 + a + n_0 a + n_0 a^2 \\ &\geq 1 + (n_0 + 1) a + n_0 a^2 \\ &\geq 1 + (n_0 + 1) a\end{aligned}$$

Ainsi, si $P(n_0)$, alors $P(n_0 + 1)$ est vraie.

3. **conclusion** : la propriété $P(0)$ est vraie ; elle est héréditaire à partir du rang 0. Donc, par récurrence, on a prouvé (pour $a > 0$) que pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + n a$$

2) Limite finie ou infinie d'une suite

On étudie le comportement d'une suite lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque n « devient très grand ».

2 - 1) Définitions

Définition :

limite finie d'une suite

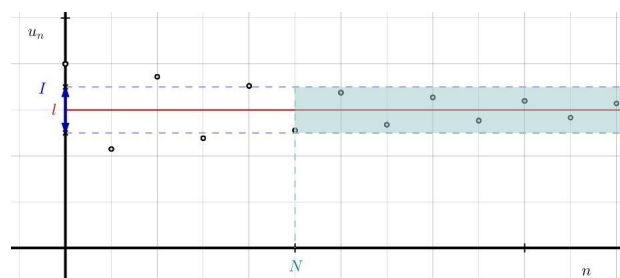
Soit une suite u et un réel l . On dit que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, ou que la suite u converge vers l si tout intervalle ouvert I contenant l (intervalle aussi « petit » soit-il) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N .

Autre formulation :

quel que soit l'intervalle ouvert I contenant l , il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \in I$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Interprétation graphique



Même si l'intervalle I est « très petit », il existera toujours un rang N à partir duquel toutes les valeurs de la suite u appartiendront à cet intervalle.

Propriété :

unicité de la limite

Quand elle existe, la limite d'une suite u est unique .

DÉMONSTRATION : on peut raisonner par l'absurde en faisant l'hypothèse qu'une suite u admette deux limites l et l' différentes.

On peut prendre par exemple $l < l'$.

On considère les intervalles ouverts $]l - e; l + e[$ et $]l' - e; l' + e[$ avec e suffisamment petit pour que ces intervalles soient disjoints.

On peut prendre par exemple $e = \frac{l' - l}{3}$

Comme on a supposé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in]l - e; l + e[$.

De même, comme on a supposé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$, il existe un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n \in]l' - e; l' + e[$.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N; N')$, $u_n \in]l - e; l + e[\cap]l' - e; l' + e[$. [1]

Or, on a choisi e de telle sorte que ces deux intervalles aient une intersection vide. L'écriture [1] est une contradiction (des éléments u_n qui appartiennent à un ensemble vide) qui signifie que l'hypothèse initiale ($l \neq l'$) est fausse.

Ceci prouve l'unicité de la limite d'une suite, si elle existe.

Définition :

limite infinie d'une suite

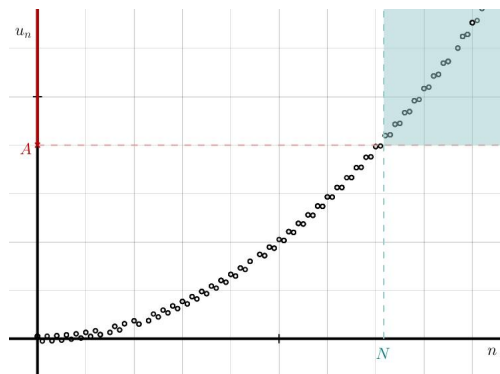
On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou que la suite u diverge vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N .

Autre formulation :

quel que soit le nombre réel A , il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n > A$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Interprétation graphique



Même si la valeur de A est « très grande », il existera toujours un rang N à partir duquel toutes les valeurs de la suite u seront supérieures à A .

Concrètement, les termes deviennent aussi grand qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.

De la même façon, on définit « u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ » (que l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$) en remplaçant « intervalle de la forme $]A; +\infty[$ » par « intervalle de la forme $] - \infty; A[$ ». Dans ce cas, pour tout entier $n \geq N$, $u_n < A$.

ATTENTION : Une suite peut ne pas admettre de limite.

Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 . Elle n'admet pas de limite. On dit qu'elle **diverge**.

Il peut être délicat de déterminer des limites en utilisant les définitions. C'est pourquoi il est indispensable de connaître les limites des suites usuelles.

2 - 2) Limites des suites usuelles

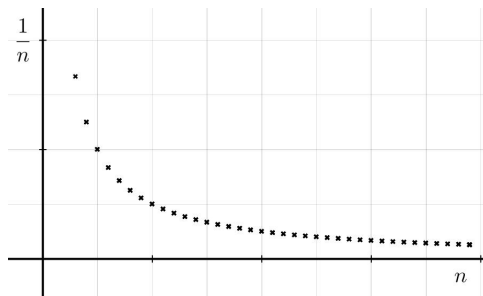
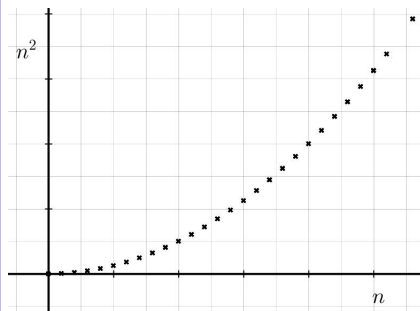
Théorèmes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}$$

$$\text{Pour tout entier } k \geq 1 : \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Remarque

On peut utiliser des représentations graphiques pour mémoriser ces limites.



PREUVE DE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Soit A un réel quelconque ; il faut prouver qu'il existe un rang N à partir duquel toutes les valeurs de la suite sont supérieures à cette valeur A .

* Si $A \leq 0$, quelle que soit la valeur de n , $\sqrt{n} \geq A$

* Si $A > 0$, pour tout entier $n \geq A^2$, $\sqrt{n} \geq A$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$)

Soit N le plus petit entier tel que $N \geq A^2$; alors :

Pour tout entier $n \geq N$, on a $\sqrt{n} > A$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

2 - 3) Opérations sur les limites

Théorèmes (admis) :

Soient u et v deux suites. Soient l et l' deux réels.

Somme de deux suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure directement

Produit de deux suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure directement

Quotient de deux suites

On suppose que pour entier n , $v_n \neq 0$.

* **Cas où la suite u est positive** à partir d'un certain rang.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	0	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	On ne peut pas conclure	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	On ne peut pas conclure

* **Dans le cas où la suite u est négative** à partir d'un certain rang, on construit un tableau analogue en utilisant la règle des signes.

REMARQUES :

Ces règles traduisent des notions qui se comprennent bien intuitivement :

- la somme d'un « très grand nombre » et d'un « très grand nombre » donne un « très grand nombre » ; cela traduit le fait que la limite de la somme de deux suites qui divergent vers $+\infty$ diverge elle aussi vers $+\infty$.
- la somme d'un « très grand nombre » et d'un « très petit nombre » (à voir comme un « très grand nombre négatif ») ne peut pas être déterminée a priori ; cela traduit le fait que la limite de la somme d'une suite qui diverge vers $+\infty$ et d'une suite qui diverge vers $-\infty$ est une **forme indéterminée**.
- le produit d'un « très grand nombre » par un « très grand nombre » est un « très très grand nombre » ; cela traduit le fait que le produit de deux suites qui divergent vers $+\infty$ est une suite qui diverge elle aussi vers $+\infty$.
- le quotient d'un « très grand nombre » par un « nombre très proche de 0 » est un « très très grand nombre » ; cela traduit le fait que la limite d'une suite qui est le quotient d'une suite qui diverge vers $+\infty$ et d'une suite qui converge vers 0 est une suite qui diverge vers $+\infty$.

EXEMPLES :

$$u_n = \frac{-4}{n^2 + 3}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty$ (par somme) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 = -4$

Par quotient, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^2 + 3} = 0$

$$v_n = n^2 - n$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$: on est dans le cas où on ne peut pas conclure, en utilisant la somme de limites.

En cas d'indétermination, la méthode consiste à mettre en facteur la partie de l'écriture littérale qui a « le plus de poids ».

On peut conjecturer la limite (à l'aide de la calculatrice par exemple), analyser qui dans l'expression tend lui même vers cette limite et mettre ce terme en facteur.

Pour v_n , on veut montrer que cette suite tend vers $+\infty$; c'est le terme n^2 qui en est la cause. On le met en facteur :

$$v_n = n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Quand n tend vers $+\infty$, n^2 tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Ainsi, $1 - \frac{1}{n}$ tend vers 1.

Par produit des limites ($+\infty$ et 1), on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = +\infty$

3) Limites et comparaison

3 - 1) Détermination de limites par comparaison

Théorèmes :

Soient deux suites u et v et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

– **Théorème de minoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

– **Théorème de majoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

DÉMONSTRATION - BAC :

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les u_n à partir d'un certain rang que l'on note p : pour tout $n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout entier $n \geq \max(p; N)$, on a $v_n \geq u_n > A$, c'est-à-dire : $v_n \in]A; +\infty[$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

La démonstration du théorème de minoration est analogue.

Exemple

Soit la suite u définie par

$$u_n = n + \sin(n)$$

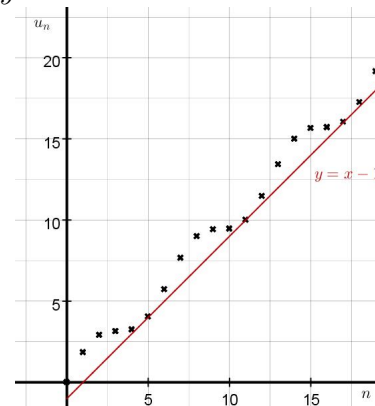
Pour tout entier n , $\sin(n) \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Graphiquement, les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$:



Théorème (admis) : Théorème d'encadrement , dit « des gendarmes »

On considère trois suite u , v et w . Soient un entier N et un réel l .

On suppose que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si les suites u et w convergent vers la même limite l , alors la suite v converge également vers l .

Exemple

Soit la suite u définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$

Pour tout entier n ,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1, \\ \text{donc } -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On conclut par le théorème « des gendarmes » que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3 - 2) Cas des suites monotones et convergentes

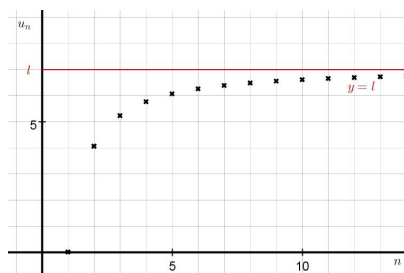
Théorème :

Soit un suite u convergeant vers un réel l .

Si la suite u est croissante, alors la suite u est majorée par l , c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq l$.

Représentation graphique

Suite majorée



Les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont sous la droite d'équation $y = l$

DÉMONSTRATION - BAC :

On peut raisonner **par l'absurde** : on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$.

Comme la suite u est croissante, pour tout $n \geq n_0$, $l < u_{n_0} \leq u_n$ [1]

L'intervalle $]l - 1; u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert contenant l .

Comme la suite u converge vers l , il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < u_{n_0}$ [2]

Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, $u_n < u_{n_0}$

Alors, pour tout entier $n \geq \max(N; n_0)$, on a : $u_{n_0} \leq u_n$ et $u_n < u_{n_0}$. On aboutit à une contradiction, et l'hypothèse initiale est donc fausse.

On en déduit que pour tout entier n , $u_n \leq l$

4) Convergence de certaines suites

4 - 1) Convergence des suites monotones

Théorème (admis) :

- * Si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle est convergente.
- * Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est convergente.

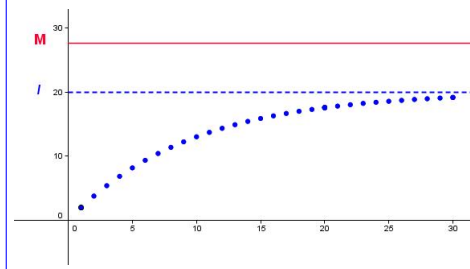
Attention : ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son **existence et un minorant, ou majorant de la limite**.

CONSÉQUENCE : une suite croissante est

- soit majorée et convergente ;
- soit non majorée et divergente vers $+\infty$.

On obtient des résultats analogues pour des suites décroissantes.

Représentation graphique



4 - 2) Limite d'une suite géométrique

définition :

On considère un réel q . La suite (q^n) des puissances de q converge si et seulement si : $-1 < q \leq 1$. Plus précisément,

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) **diverge vers** $+\infty$:
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) **converge vers** 0 :
 $+\infty : \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

DÉMONSTRATION - BAC :

Soit un réel q

* On suppose que $q > 1$

On pose alors $q = 1 + a$, avec $a > 0$.

On peut montrer par récurrence que $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1 + na$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$

D'après le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

* On suppose que $-1 < q < 1$

- dans le cas où $q = 0$, on a de façon évidente $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

- dans le cas où $0 < q < 1$, on a $\frac{1}{q} > 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty, \text{ c'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$$

Par passage à l'inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

- dans le cas où $-1 < q < 0$, pour tout entier n ,
 $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

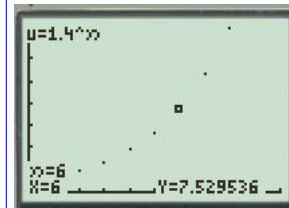
* On suppose que $q \leq -1$

Les valeurs de q^n appartiennent alternativement aux intervalles $] -\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$ selon la parité de n . La suite de terme général q^n n'admet donc pas de limite.

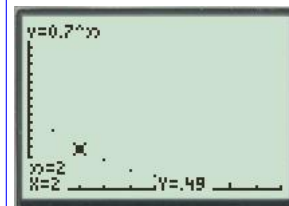
Représentation graphique

Avec la calculatrice :

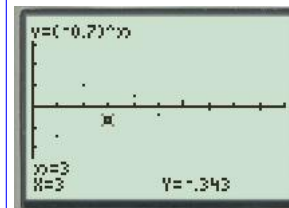
Pour $q = 1,4$:



Pour $q = 0,7$:



Pour $q = -0,7$:



Pour $q = -1,4$:

