Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.
Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.
Bien indiquer les numéros des exercices

***Exercice* 1** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue ; pour rappel, on peut la décrire, pour u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I par :

pour tout $x \in I$, $\Big(u(x)(v(x)\Big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q.
Dire pour chacune d'elles, si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

* P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
* Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

***Exercice* 2** : /6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$
	Début du tant que
	$a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
	$c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
	$e :=$ rand(1, 50)
	Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :

$L_1 = \{2\ ;\ 11\ ;\ 44\ ;\ 2\ ;\ 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;

$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

***Exercice* 3** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. a. Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

***Exercice* 4** : /4 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x} - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.
2. Démontrer votre conjecture.
3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. On **admet** [1] dans cette question qu'à l'aide des inégalités précédentes, on peut démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e}$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

***Exercice* 5** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

---

1. s'il vous reste du temps et de l'énergie, vous pouvez essayer de démontrer cette double inégalité à partir des résultats obtenus à la question 3.

Exercice **6** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La rédaction des réponses aux deux questions suivantes doit être soignée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+2x+3}$
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+3n-1}{5-n^2}$

***Exercice* 7** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (3 points)

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$u_1 = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{2}{3}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$.

Le but de l'exercice est d'étudier les deux suites imbriquées par une méthode matricielle. Pour cela, on notera X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice carré que l'on déterminera.

   b. Vérifier que $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$

2. Retrouver les termes u_0 et v_0 par une démarche matricielle à détailler, puis à mettre en œuvre sur votre calculatrice pour obtenir les deux valeurs.

3. L'objectif de la suite est de déterminer si les suites u et v convergent lorsque n tend vers l'infini.

   On admettra pour cela, sans le démontrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, et on admettra que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$.

   a. Vérifier à la calculatrice que P est inversible, puis que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

4. Déduire de ce qui précède les expressions littérales de u_n et v_n en fonction de n, et conclure que les deux suites convergent vers $\frac{3}{5}$.

Partie 2 (2 points)

1. **a.** Observer les restes dans la division euclidienne par quatre des carrés des premiers entiers naturels, puis émettre une conjecture sur ce reste pour tous les entiers naturels.

   b. Démontrer votre conjecture du a)

2. Montrer qu'il n'y a que trois restes possibles dans la division par quatre de la somme de deux carrés d'entiers naturels quelconques.

3. Dans un repère orthonormé d'origine O, Bob a tracé le cercle de centre O et de rayon $5\sqrt{7}$. Il prétend avoir trouvé un point du cercle dont les deux coordonnées sont des entiers. Qu'en pensez-vous ?