Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue ; pour rappel, on peut la décrire, pour u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I par :

pour tout $x \in I$, $\left(u(x)(v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q.
Dire pour chacune d'elles, si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

* P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

  Démontrons cette propriété par récurrence : pour n entier strictement supérieur à 1, on pose :
  $P(n)$: « $(x^n)' = nx^{n-1}$ »

  initialisation : pour $n = 2$: $(x^2)' = 2x$; la propriété est vérifiée.

  hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montré que $P(n+1)$ est alors vraie.

  $\left(x^{n+1}\right)' = (x^n \times x)' = (x^n)' \times x + x^n \times 1$ en appliquant la formule du produit d'une dérivée.

  Cela donne alors, en appliquant la propriété $P(n)$: $\left(x^{n+1}\right)' = nx^{n-1} \times x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$; cette dernière relation veut exactement dire que $P(n+1)$ est vraie ; la propriété est héréditaire.

  conclusion : $P(2)$ est vraie et : pour $n > 1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ; cela montre que pour tout nombre entier strictement supérieur à 1, $P(n)$ est vraie.

* Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

  Cette relation est fausse ; utilisons un contre exemple pour le montrer.

  Soit $f(x) = (2x+1)^2$; d'une part, $f'(x) = \left(4x^2 + 4x + 1\right)' = 8x + 4$

  D'autre part, en utilisant la formule proposée, $f'(x) = 2 \times (2x+1)^1 = 4x + 2$; ceci est inexact.

  La proposition Q est fausse.

***Exercice* 2** : /6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :

- « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
- l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$
	Début du tant que
	$a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
	$c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
	$e :=$ rand(1, 50)
	Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?
L_1 et L_3 n'ont pu être obtenus avec cet algorithme puisqu'ils contiennent des éléments identiques. Les deux autres oui.

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
Cet algorithme permet chaque jour de tirer au sort 5 coureurs pour subir un contrôle antidopage.

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $\frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0,1$.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
Les tirages de groupes de 5 sont chaque jour indépendants les uns des autres et la probabilité d'être choisi pour un des 50 coureurs est égale à 0,1 : la loi X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

– il a été contrôlé 5 fois exactement ;

On a $p(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,1^5 \times (1-0,1)^{10-5} = 252 \times 0,1^5 \times 0,9^5 \approx 0,00148$ soit environ 0,0015

– il n'a pas été contrôlé ;

$p(X=0) = 0,1^0 \times 0,9^{10} \approx 0,3487$.

– il a été contrôlé au moins une fois.

On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,6513$.

Partie B

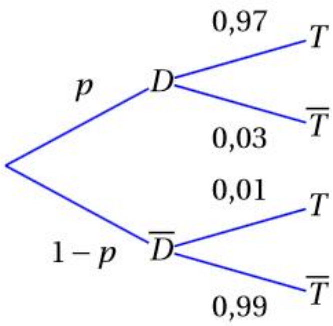
Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

– si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
– si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

En notant $p(D) = p$, on peut construire l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$p(T) = p_D(T) \times p(D) + p_{\overline{D}}(T) \times p\left(\overline{D}\right)$ ou encore

$0,05 = 0,97p + 0,01(1-p) \iff 0,05 = 0,97p + 0,01 - 0,01p \iff$

$0,96p = 0,04 \iff p = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$. (un peu plus de 2 coureurs sur 50)

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Il faut calculer $p_T\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(T \cap \overline{D}\right)}{p(T)} = \dfrac{0,01\left(1-\frac{1}{24}\right)}{0,05} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{23}{24} = \dfrac{23}{120} \approx 0,19$.

Exercice **3** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

$P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} =$
$-2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3 + az^2 + bz - z^2\mathrm{i}\sqrt{2} - az\mathrm{i}\sqrt{2} - b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3 + \left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Par identification avec l'énoncé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2-\mathrm{i}\sqrt{2} \\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b & = & -2 \end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b & = & 2 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

On a donc $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

En utilisant la factorisation précédente :

$$P(z) = 0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 0 \\ z^2-2z+2 & = & 0 \end{array}\right.$$

On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :

$$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff$$
$$(z-1)^2=-1 \iff (z-1)^2=\mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 & = & \mathrm{i} \\ z-1 & = & -\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1+\mathrm{i} \\ z & = & 1-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$.

Exercice **4** : /4 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.

   On peut conjecturer, en utilisant une représentation graphique, que $f \geqslant 0$.

2. Démontrer votre conjecture.

   On peut étudier rapidement cette fonction en dérivant f : $f'(x) = e^x - 1$; et donc f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle présente un minimum en 0 égal à $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$: la conjecture est démontrée.

3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1)\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2)\quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

   On utilise le résultat précédent avec $x = \dfrac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{n} - 1 \geqslant 0 \iff e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$

   De même avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}} - \left(-\dfrac{1}{n+1}\right) - 1 \geqslant 0 \iff e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$

4. On **admet** [1] dans cette question qu'à l'aide des inégalités précédentes, on peut démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

   En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

   Comme $\dfrac{ne}{n+1}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, on conclut par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

---

1. s'il vous reste du temps et de l'énergie, vous pouvez essayer de démontrer cette double inégalité à partir des résultats obtenus à la question 3.

Exercice **5** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 3$ et $u_2 = 10$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.

- $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Par le théorème de comparaison, $\lim (u_n) = +\infty$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.
Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

***Exercice* 6** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La rédaction des réponses aux deux questions suivantes doit être soignée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+2x+3}$

   $x^2+2x+3 = x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$

   Or, $\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{3}{x^2}$ tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$, on conclut (par produit) que x^2+2x+3 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

   Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, on conclut (par composition) que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+2x+3} = +\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n-1}{5-n^2}$

   $$\frac{n^2+3n-1}{5-n^2} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2}-1}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2}-1 = -1$

   Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n-1}{5-n^2} = -1$

Exercice 7 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (3 points)

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$u_1 = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{2}{3}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$.

Le but de l'exercice est d'étudier les deux suites imbriquées par une méthode matricielle. Pour cela, on notera X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice carré que l'on déterminera.

   $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   b. Vérifier que $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$

   Par produit matriciel, $X_2 = A \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$

2. Retrouver les termes u_0 et v_0 par une démarche matricielle à détailler, puis à mettre en œuvre sur votre calculatrice pour obtenir les deux valeurs.

   On remarque que A est inversible (au besoin, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$), donc :

   $X_1 = A \times X_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1} \times X_1$. On en déduit que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$

3. L'objectif de la suite est de déterminer si les suites u et v convergent lorsque n tend vers l'infini.

   On admettra pour cela, sans le démontrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, et on admettra que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$.

   a. Vérifier à la calculatrice que P est inversible, puis que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   Pas de rédaction nécessaire : cette question permet de s'assurer que le candidat ne fait pas d'erreur au démarrage.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

   On montre cela par récurrence

   Initialisation : $A^0 = I$ et $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = I$ aussi

   Hérédité : on suppose pour **un** n fixé que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

   $A^{n+1} = A\times A^n = (P\times D\times P^{-1})\times(P\times D^n\times P^{-1}) = P\times D\times(P^{-1}\times P)\times D^n\times P^{-1} = P\times D^{n+1}\times P^{-1}$

4. Déduire de ce qui précède les expressions littérales de u_n et v_n en fonction de n, et conclure que les deux suites convergent vers $\frac{3}{5}$.

Après calculs (un peu longs), on trouve $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \times (1 - \frac{1}{6^n}) \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$

Puisque $0 < \frac{1}{6} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6^n} = 0$.

Par somme et produit de limites, on en déduit que :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5} \times (1-0) = \frac{3}{5}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times 0 = \frac{3}{5}$

Partie 2 (2 points)

1. **a.** Observer les restes dans la division euclidienne par quatre des carrés des premiers entiers naturels, puis émettre une conjecture sur ce reste pour tous les entiers naturels.

   $1^2 = 1 \equiv 1 \bmod 4$, $2^2 = 4 \equiv 4 \equiv 0 \bmod 4$, $3^2 = 9 = 2 \times 4 + 1 \equiv 1 \bmod 4, \ldots$

   Conjecture : si n est pair, alors $n^2 \equiv 0 \bmod 4$, sinon $n^2 \equiv 1 \bmod 4$

   b. Démontrer votre conjecture du a)

   Soit n un entier naturel.

   Si n est pair, alors $n \equiv 0 \bmod 4$ ou $n \equiv 2 \bmod 4$

   Avec $n \equiv 0 \bmod 4$, on a $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \bmod 4$

   Avec $n \equiv 2 \bmod 4$, on a $n^2 \equiv 4 \equiv 0 \bmod 4$ aussi.

   Si n est impair, alors $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 3 \bmod 4$

   Avec $n \equiv 1 \bmod 4$, on a $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \bmod 4$

   Avec $n \equiv 3 \bmod 4$, on a $n^2 \equiv 9 \equiv 1 \bmod 4$ aussi.

   La conjecture est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il n'y a que trois restes possibles dans la division par quatre de la somme de deux carrés d'entiers naturels quelconques.

   D'après le 1, x et y sont congrus à 0 ou 1 modulo 4.

   Leur somme peut donc être congrue à $0+0$, $0+1 = 1+0 = 1$ ou $1+1 = 2$ modulo 4.

3. Dans un repère orthonormé d'origine O, Bob a tracé le cercle de centre O et de rayon $5\sqrt{7}$. Il prétend avoir trouvé un point du cercle dont les deux coordonnées sont des entiers. Qu'en pensez-vous ?

   Le repère étant orthonormé, en notant x et y les coordonnées du point trouvé par Bob, on aurait : $x^2 + y^2 = (5\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 175$ (*).

   Or $175 = 4 \times 43 + 3$ donc $175 \equiv 3 \bmod 4$.

   D'après le 2, il n'existe pas d'entiers naturels x et y vérifiant l'égalité (*).

   Puisque pour tout n, $(-n)^2 = n^2$, il n'existe pas non plus d'entiers relatifs la vérifiant. Bob ne peut pas avoir raison.