Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

- Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $\big(0; f(0)\big)$ soit $(0\,;\,2)$.
- Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
  On applique la règle du produit nul en sachant que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$:
  $f(x) = 0 \iff x+2 = 0 \iff x = -2$.
  Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2\,;\,0)$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

Remarque : la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle

ou bien comme un quotient $\left(\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \\ &\lim_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty \end{aligned}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Mais, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

$$\left.\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \text{ théorème de croissance comparée } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

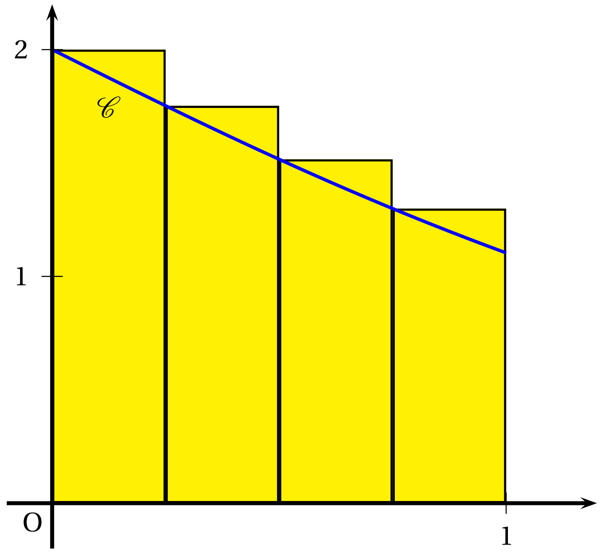
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme. $1,642$

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

Variables :	k est un nombre entier
	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à **N-1**
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{\mathbf{N}} f\left(\frac{k}{\mathbf{N}}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

Sur $[0~;~1]$, f est continue et positive, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$\mathscr{A} = \left[g(t)\right]_0^1 = g(1) - g(0) = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

avec la calculatrice, $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} - 1{,}642 \approx 0{,}113$