

Nom Prénom :

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation. L'annexe de l'exercice est à rendre avec la copie.

Exercice 1 :

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

- Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
- On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.
Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x . On note K le milieu du segment $[MP]$.

- Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
- En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

ANNEXE de l'EXERCICE, à rendre avec la copie

Représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1

