proposition de corrigé

Toutes les réponses sont à justifier.

Les équations paramétriques pourront être données directement, sauf dans l'ex 3.

***Exercice* 1** : /0,5 pt

Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{7}{3};2;\frac{3}{4}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{7}{4};\frac{3}{2};\frac{9}{20}\right)$ sont-ils colinéaires ?

NON ; en effet : $\frac{7}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ mais $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}\neq\frac{9}{20}$

***Exercice* 2** : /1,5 pt

Les vecteurs $\vec{u}\left(1;-3;4\right)$, $\vec{v}\left(-1;3;-1\right)$ et $\vec{w}\left(-1;3;1\right)$ sont-ils coplanaires ?

OUI ; en effet : $2\vec{u}+5\vec{v}=3\vec{w}$

***Exercice* 3** : /1,5 pt

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1;-1;2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d}(5;-1;-3)$

Déterminer l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ (en utilisant comme paramètre t), en **rédigeant soigneusement**.

$M\in\mathscr{D}\Leftrightarrow\vec{d}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{d}$

Or, $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-(-1)\\z-2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\,t\\-1\,t\\-3\,t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+5\,t\\y=-1-\,t\\z=2-3\,t\end{cases}$

***Exercice* 4** : /2,5 pt

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1;-1;2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d}(5;-1;-3)$

Soit $\mathscr{D}'$ la droite passant par le point $A'(3;2;5)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d}'(1;5;0)$

1. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles sécantes ?

   $\mathscr{D}$ a pour équation paramétrique (de paramètre t) : $\begin{cases}x=1+5\,t\\y=-1-\,t\\z=2-3\,t\end{cases}$

   $\mathscr{D}'$ a pour équation paramétrique (de paramètre t') : $\begin{cases}x=3+\,t'\\y=2+5\,t'\\z=5\end{cases}$

$$M \in \mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \leftrightarrow \begin{cases} x = 1+5\,t = 3+\ t' \\ y = -1-\ t = 2+5\,t' \\ z = 2-3\,t = \quad 5 \end{cases}$$

La dernière ligne de ce système donne : $t=-1$

En remplaçant t par cette valeur dans la première ligne, on obtient : $t'=-7$; dans la seconde ligne, cela donne $t'=-\dfrac{2}{5}$

Ce système est **incompatible** : il n'a pas de solution, ce qui signifie que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas sécantes.

2. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles parallèles ?

Les vecteurs $\vec{d}(5;-1;-3)$ et $\vec{d}'(1;5;0)$ ne sont pas colinéaires (cela se voit sur la dernière coordonnée, nulle pour $\vec{d}'$ et non nulle pour $\vec{d}$) : cela signifie que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

***Exercice* 5** : /2 pt

Les représentations paramétriques suivantes : $\begin{cases} x = 1+3\,s \\ y = 2-5\,s \\ z = -2+4\,s \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -2-6\,t \\ y = 7+10\,t \\ z = -6-8\,t \end{cases}$ représentent-elles la même droite ?

OUI

Première méthode : la première représentation paramétrique est celle d'une droite qui passe par le point (que l'on peut noter A) de coordonnées $(1;2;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(3;-5;4)$

La seconde représentation paramétrique est celle d'une droite qui passe par le point (que l'on peut noter B) de coordonnées $(-2;7;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{d}'(-6;10;-8)$

D'une part, comme $\vec{d}'=-2\vec{d}$, les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ sont colinéaires. Cela signifie que ces vecteurs dirigent les deux droites ; elles sont parallèles.

D'autre part, B appartient à la première droite : il suffit de prendre comme valeur $s=-1$ pour le paramètre. Ces droites sont donc parallèles et ont un point commun : elles sont confondues.

Seconde méthode : on peut vérifier que deux points appartenant à la première droite appartiennent aussi à la seconde.

Pour la première droite, avec $s=0$ et $s=1$, on montre que les points $A(1;2;-2)$ et $B(4;-3;2)$ en font partie ; cette droite peut être nommée (AB).

Or, pour $t=\dfrac{1}{2}$ dans la seconde équation paramétrique, on observe que le point A appartient à la droite décrite par cette représentation paramétrique.

De même, pour $t=-1$, on observe que le point B appartient également à cette droite ; elle aussi est la droite (AB). Ces deux représentations paramétriques décrivent bien la même droite.

***Exercice* 6** : /2 pt

Le plan $\mathscr{P}_1$ est le plan passant par le point $A(1;0;1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{d_1}(-1;0;1)$ et $\vec{d_1'}(-1;0;2)$.

Le plan $\mathscr{P}_2$ est le plan passant par le point $B(0;1;0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{d_2}(1;0;1)$ et $\vec{d_2'}(1;-1;1)$.

Déterminer $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$

On détermine l'équation paramétrique de $\mathscr{P}_1$ (avec les paramètres s et t) :

$$\begin{cases} x = 1-t-s \\ y = \quad 0 \\ z = \quad t+2s \end{cases}$$

De même pour $\mathscr{P}_2$ (avec les paramètres m et n) :

$$\begin{cases} x = \quad m+n \\ y = \quad 1-n \\ z = 1-m+n \end{cases}$$

$$M \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-t-s = m+n \\ y = \quad 0 \quad = 1-n \\ z = \quad t+2s \ = m+n \end{cases}$$

A l'aide de la coordonnée y, on trouve : $n = 1$; il suffit alors de remplacer n par 1 sur les coordonnées x et z pour tout exprimer en fonction d'un seul paramètre :
$M(x;y;z) \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \iff$ il existe un réel m tel que :

$$\begin{cases} x = 1+m \\ y = \quad 0 \\ z = 1+m \end{cases}$$

L'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est la droite qui passe par $A(1;0;1)$, dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1;0;1)$ (c'est à dire $\vec{d_2}$).