proposition de corrigé

***Exercice* 1** : (/ 5 points)

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^4$

   $f'(x) = 5 \times 4x^3 = 20x^3$

2. $g(x) = (x+1)(3x^2 - 2x + 3)$

   $u(x) = x + 1$ donne $u'(x) = 1$

   $v(x) = 3x^2 - 2x + 3$ donne $v'(x) = 6x - 2$

   On applique $(uv)' = u'v + uv'$: $g'(x) = 1 \times (3x^2 - 2x + 3) + (x+1) \times (6x - 2)$

   On développe et réduit :

   $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3 + 6x^2 - 2x + 6x - 2 = 9x^2 + 2x + 1$

   $\boxed{g'(x) = 9x^2 + 2x + 1}$

3. $h(x) = \dfrac{x^3}{2-x}$

   $u(x) = x^3$ donne $u'(x) = 3x^2$

   $v(x) = 2 - x$ donne $v'(x) = -1$

   On applique $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

   $h'(x) = \dfrac{3x^2(2-x) - x^3(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{6x^2 - 3x^3 + x^3}{(2-x)^2} = \dfrac{-2x^3 + 6x^2}{(2-x)^2}$

   $\boxed{h'(x) = \dfrac{-2x^3 + 6x^2}{(2-x)^2}}$

***Exercice* 2** : (/ 4 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^3$

1. Déterminer $f'(x)$

   $f'(x) = 3x^2$

2. Déterminer l'équation de la tangente à le courbe représentative à la fonction f au point d'abscisse 2. (vérifier à la calculatrice la validité de votre réponse)

   L'équation de cette tangente est du type : $y = ax + b$

   On sait déjà que $a = f'(2) = 3 \times 2^2 = 12$

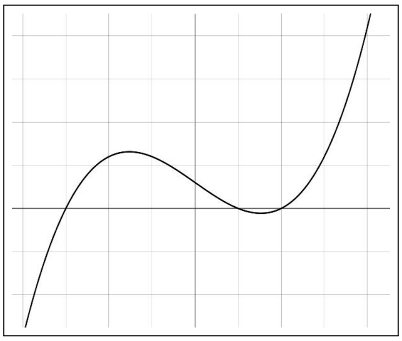
   Par ailleurs, la tangente va passer par le point de coordonnées $\big(2\ ;\ f(2)\big)$ c'est-à-dire $(2\ ;\ 8)$

   On remplace donc y par 8 et x par 2 dans l'expression précédente : $8 = 12 \times 2 + b$ ce qui donne : $8 = 24 + b$ et donc $b = -16$

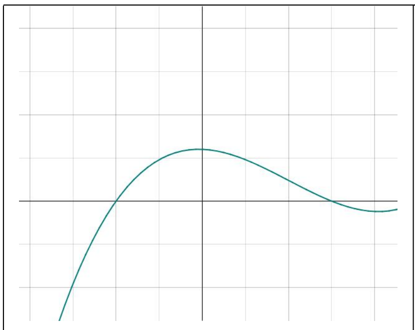
   Au final, la tangente en question a pour équation : $\boxed{y = 12x - 16}$

***Exercice* 3** : (/ 4 points)

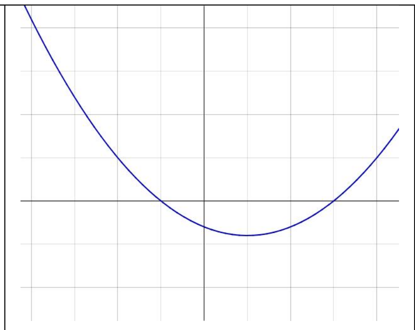
On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.



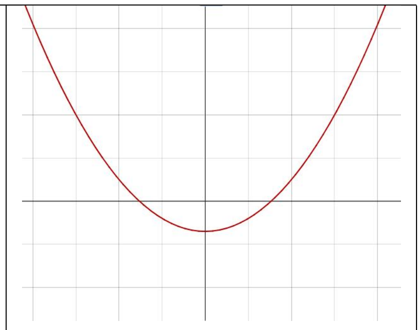
Parmi les trois courbes proposées ci-dessous, laquelle peut correspondre à la représentation graphique de la fonction dérivée de f ? (*la réponse devra être justifiée*)



courbe n°1



courbe n°2



courbe n°3

La fonction dérivée est positive lorsque la fonction est croissante ; ainsi, si un carreau représente une unité, la fonction de départ est croissante sur $[-4\ ;\ -1,5]$. La seule courbe représentant une fonction positive exactement sur cet intervalle, qui devient négative en -1,5 est la courbe n°3.

$\boxed{\text{C'est la courbe n°3 qui représente la fonction dérivée.}}$

***Exercice* 4** : (/ 7 points)

Pour un produit donné, le coût C, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de pièces produites, est donné par : $C(x) = 0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,6x + 15$ (pour x compris entre 0 et 30).

Chaque pièce est vendue 2,7 milliers d'euros.

1. Pour 10 pièces produites et vendues, calculer le coût de fabrication, le prix de vente et le bénéfice réalisé.

   $C(10) = 17,5$: le coût de fabrication de 10 pièces est 17 500 €.

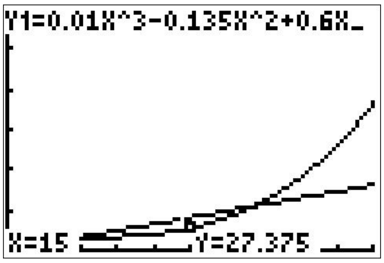
   Le prix de vente est $10 \times 2,7 = 27$ milliers d'euros, soit 27 000 €.

   Le bénéfice est alors égal à $27\ 000 - 17\ 500 = 9\ 500$ €.

2. (a) Exprimer, en milliers d'euros, le prix de vente $P(x)$ pour x pièces vendues.

   $P(x) = 2,7x$

(b) Représenter sur votre calculatrice les courbes des fonctions C et P.



(c) Conjecturer graphiquement la quantité x de pièces à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

Le bénéfice est positif lorsque la courbe représentant la fonction prix de vente est au-dessus de celle représentant la fonction coût de production.

Il est maximum quand l'écart entre les deux courbes est le plus grand dans la partie où le bénéfice est positif ; graphiquement, c'est autour de la valeur $x = 14$.

3. (a) Montrer que le bénéfice s'exprime par : $B(x) = -0,01x^3 + 0,135x^2 + 2,1x - 15$

$B(x) = P(x) - C(x) = 2,7x - (0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,6x + 15)$
$= 2,7x - 0,01x^3 + 0,135x^2 - 0,6x - 15 = -0,01x^3 + 0,135x^2 + 2,1x - 15$

(b) Déterminer la dérivée de la fonction B

$B'(x) = -0,01 \times 3x^2 + 0,135 \times 2x + 2,1 = -0,03x^2 + 0,27x + 2,1$

(c) Compléter le tableau de variation suivant (les calculs nécessaires seront écrits à côté et en dessous du tableau) :

x	0	x_1	30
signe de $B'(x)$	$+$	0	$-$
variations de B	$\nearrow$	$B(x_1)$	$\searrow$

$\Delta = 0,27^2 - 4 \times (-0,03) \times 2,1$

$\Delta = 0,3249 = 0,57^2 > 0$ donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-0,27 - 0,57}{-0,03 \times 2} = 14$

$x_2 = \dfrac{-0,27 + 0,57}{-0,03 \times 2} = -5$

(d) Quelle production assure un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Le bénéfice sera donc maximal pour une production égale à x_1, soit 14 pièces.

On calcule $B(14) = 13,42$ milliers d'euros, soit 13 420 €.