***Exercice* 1** *Question de cours*

Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble A inclus dans $\mathbb{R}$ et les résultats importants à connaître.

- l'existence : tout ensemble **non vide majoré inclus dans** $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- la définition : la borne supérieure d'un ensemble A est (si elle existe) le plus petit des majorants de A; on la note $sup(A)$.
- propriété 1 : si A admet une borne supérieure (notée $sup(A)$) alors : $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que : $a - \epsilon < sup(A)$.
- propriété caractéristique : si A admet une borne supérieure, si S est un majorant de A tel que : $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que : $S - \epsilon < a \leqslant S$, alors $S = sup(A)$.
- on peut ajouter comme remarque : si A admet un plus grand élément (noté $max(A)$), alors $max(A) = sup(A)$.

***Exercice* 2** *bornes supérieure et inférieure*

On considère deux ensembles inclus dans $\mathbb{R}$, non vides et bornés, notés A et B.

On note $A - B$ l'ensemble $\{a - b,\ a \in A\ ,\ b \in B\}$

1. Justifiez que $A - B$ admet une borne supérieure.

   On vérifie chaque point justifiant l'existence d'une borne supérieure :
   * $A - B$ est inclus dans $\mathbb{R}$ (il suffit de le dire) ;
   * $A - B$ est non vide (comme A est non vide, il existe $a \in A$; de même, B non vide $\to \exists b \in B$; alors $a - b \in A - B$) ;
   * $A - B$ admet un majorant : A est borné donc majoré ; on note M_A un majorant de A ; B est bornée donc **minorée** : on note m_B un minorant de B ; alors : $\forall a \in A$, $a \leqslant M_A$ et $\forall b \in B$, $b \geqslant m_B$ et donc $-b \leqslant -m_B$ ce qui donne $a + (-b) \leqslant M_A + (-m_B)$ et finalement : $a - b \leqslant M_A - m_B$; cela montre que $A - B$ est majoré.

   On conclut alors que $A - B$ admet une borne supérieure notée $sup(A - B)$.

2. La borne supérieure de $A - B$ (notée $sup(A - B)$) est-elle égale à :

   a. $sup(A) - sup(B)$?

   b. $sup(A) - inf(B)$?

   c. $inf(A) - sup(B)$?

   d. $inf(A) - inf(B)$?

   Vous démontrerez le résultat « vrai » et un des résultats « faux ».

   <u>On montre que b) est vrai</u> :

   La démarche ressemble à celle utilisée pour montrer que $A - B$ est minorée :
   * $\forall a \in A$, $a \leqslant sup(A)$;
   * $\forall b \in B$, $b \geqslant inf(B)$ et donc $-b \leqslant -inf(B)$;
   * par addition de deux inégalités de même sens, on obtient : $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a - b \leqslant sup(A) - inf(B)$.

   Cela montre que $sup(A) - inf(B)$ est un majorant de $A - B$; $sup(A - B)$ étant le plus petit des majorants de $A - B$, on obtient déjà : $sup(A - B) \leqslant sup(A) - inf(B)$.

   Par ailleurs, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a - b \leqslant sup(A - B)$; cela donne : $\forall a \in A$, $a \leqslant sup(A - B) + b$: le second terme est un majorant de A donc supérieur à $sup(A)$ (qui est le plus petit des majorants de A) : $sup(A) \leqslant sup(A - B) + b$.

   Cette dernière relation peut s'écrire : $\forall b \in B$, $-b \leqslant sup(A - B) - sup(A) \iff b \geqslant -sup(A - B) + sup(A)$: le second terme est donc un minorant de B : il est inférieur au plus grand des minorants ($inf(B)$) ; ainsi : $inf(B) \geqslant -sup(A - B) + sup(A)$

Cette dernière relation donne : $sup(A) - inf(B) \leqslant sup(A-B)$

Par ces deux inégalités, on a prouvé que $sup(A) - inf(B) = sup(A-B)$

Utilisons un contre exemple pour démontrer que a) est faux :

avec $A = \{0;1\}$ et $B = \{1;2\}$: $A - B = \{-2;-1;0\}$ (on construit $A-B$ en faisant toutes les différences possibles entre les éléments de A et ceux de B) ; et donc :

$sup(A-B) = 0$; $sup(A) = 1$ et $sup(B) = 2$: on n'a pas $sup(A-B) = sup(A) - sup(B)$.

***Exercice* 3** *nombres rationnels et irrationnels*

1. Démontrez que les racines du polynôme $x^2 - x - 1$ sont des nombres irrationnels. Est-ce le cas de la somme des deux racines ?

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5$

Les solutions sont : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; leur somme est égale à 1 donc est rationnelle.

Montrons que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est irrationnel :

Supposons que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ soit rationnel ; il existerait deux nombres entiers p et q tels que : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{p}{q}$ et alors : $\sqrt{5} = \dfrac{2p}{q} - 1 = \dfrac{2p-q}{q}$: $\sqrt{5}$ serait rationnel, ce qui est absurde : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est bien irrationnel.

2. Démontrez le cas général : la somme des racines d'un polynôme du second degré à coefficients rationnels est un nombre rationnel.

On considère le polynôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et a, b et c rationnels : les racines (quand elles existent, c'est-à-dire avec $\Delta \geqslant 0$ sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

En faisant la somme : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; b peut s'écrire $\dfrac{p_1}{q_1}$ et a $\dfrac{p_2}{q_2}$; on a alors : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \dfrac{p_1 q_2}{q_1 p_2}$: c'est bien un rationnel.