Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : (/ 5 points)

On pose la fonction $C(x) = x^3 - 6x^2 - 3x - 107$, où x désigne le nombre d'objets fabriqués. On les vend à 5 € l'unité, donc la recette est donnée par la fonction $R(x) = 5x$.

Le but de ce problème est de déterminer quel peut être la valeur maximale du bénéfice.

1. Déterminer l'expression de la fonction bénéfice, définie par $B(x) = R(x) - C(x)$

   $B(x) = 5x - (x^3 - 6x^2 - 3x - 107) = 5x - x^3 + 6x^2 + 3x + 107 = -x^3 + 6x^2 + 8x + 107$

2. Déterminer $B'(x)$

   $B'(x) = -3x^2 + 6 \times 2x + 8 = -3x^2 + 12x + 8$

3. Faire un tableau de signes de $B'(x)$

   Il faut déterminer le signe de B', qui est un polynôme du second degré. Il faut chercher ses racines :

   $\Delta = 12^2 - 4 \times (-3) \times 8 = 240$

   $x_1 = \dfrac{-12 - \sqrt{240}}{2 \times -3} \approx 4,58$ et $x_2 = \dfrac{-12 + \sqrt{240}}{2 \times -3} \approx -0.58$

   Le coefficient devant le terme en x^2 étant négatif, on déduit que :
   - B' est positive sur $[-0.58 \ ; \ 4,58]$
   - B' est négative sur $]-\infty \ ; \ -0.58] \cup [4,58 \ ; \ +\infty[$

   Enfin, pour que le problème ait un sens, on doit avoir $x > 0$ et donc au final :
   - B' est positive sur $[0 \ ; \ 4,58]$
   - B' est négative sur $[4,58 \ ; \ +\infty[$

4. En déduire les variations de la fonction B

   - B est croissante sur $[0 \ ; \ 4,58]$
   - B est décroissante sur $[4,58 \ ; \ +\infty[$

5. Pour quelle valeur de x la fonction est-elle maximale ?

   Le maximum du bénéfice est atteint pour $x \approx 4,58$

6. Répondre au problème initial.

   Le bénéfice maximum vaut donc environ $B(4,58) \approx 173,42$.

***Exercice* 2** : (/ 5 points)

On lance 180 fois un dé à six faces.

1. Combien de fois devrait-on avoir le 4 en moyenne ?

   Si on suppose que le dé est bien équilibré, on a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'avoir le 4 à chaque lancer. Sur 180 lancers, on devrait avoir $\frac{1}{6} \times 180 = 30$ fois le 4 qui sort.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois le 4 ?

   En notant X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 sortis, on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{6}$ et 180.

   En effet, les 180 lancers sont indépendants, ont deux issues possibles (obtenir 4 et ne pas obtenir 4), et la probabilité de « réussite » (ici, obtenir 4) est égale à $\frac{1}{6}$.

   On peut calculer $P(X = 30)$ à l'aide de la formule du cours, ou à l'aide de la calculatrice directement. On obtient $P(X = 30 \approx 7,96$ %.

3. Marc-Edouard Michel a obtenu 23 fois un 4 ; est-ce « normal » ?

   Il s'agit d'établir un intervalle de fluctuation à 95 % grâce à la loi binomiale.

   Pour cela, on calcule les probabilités cumulées, cherchant la première valeur telle que la probabilité cumulée dépasse 2,5 %, puis la première valeur telle que la probabilité cumulée dépasse 97,5 %.

   A l'aide du tableau ci-dessous,

9	0,00%
10	0,00%
11	0,00%
12	0,01%
13	0,02%
14	0,04%
15	0,09%
16	0,20%
17	0,40%
18	0,78%
19	1,42%
20	2,44%
21	4,01%
22	6,27%
23	9,37%
24	13,44%
25	18,51%
26	24,56%
27	31,46%
28	39,00%
29	46,90%
30	54,86%
31	62,55%
32	69,72%
33	76,16%
34	81,72%
35	86,36%
36	90,09%
37	93,00%
38	95,19%
39	96,79%
40	97,91%
41	98,68%

   on peut dire que l'intervalle de fluctuation à 95 % est [21 ; 40].

   Ainsi, on peut considérer « normal » d'obtenir entre 21 et 40 4 sur 180 lancers.