

TD n°1 : Nombres réels

à propos de l'exercice 3 de la partie **Inégalités**

Exercice 3 : On considère le sous-ensemble A de \mathbb{R} défini par :

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} ; x \in [-1; 1], y \in [-1; 1] \right\}$$

Trouver un majorant et un minorant de A .

On peut proposer : d'une part : $-1 \leq x \leq 1$; d'autre part : $-1 \leq y \leq 1 \iff -1 \leq -y \leq 1$

par addition : $-2 \leq x - y \leq 2$

de même, $1 \leq x + y + 3 \leq 5$ ce qui équivaut à (par passage à l'inverse de nombres strictement positifs)

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+y+3} \leq 1$$

On peut alors conclure que $\frac{x-y}{x+y+3} \leq 2$; 2 est un majorant (peut-être pas le plus petit, mais c'est un majorant).

En revanche, on ne peut pas conclure que $-\frac{2}{5} \leq \frac{x-y}{x+y+3}$; en effet, en prenant $x = -1$ et $x = 1$, on obtient $-\frac{2}{3}$ qui est inférieur à $-\frac{2}{5}$... ce qui montre bien qu'il y a un problème !

En fait, si $a \leq b$ et $c \leq d$, il faut s'assurer que ces nombres sont positifs pour pouvoir multiplier les inégalités (si tous les nombres sont négatifs, on raisonne avec les opposés).

Retenir : la règle qui permet de multiplier deux inégalités de même sens concerne **des réels positifs ou nuls**.

Il faut donc se débrouiller autrement dans cet exercice pour trouver un minorant ; on peut conjecturer que $-\frac{2}{3}$ est un minorant (par « tâtonnements »)

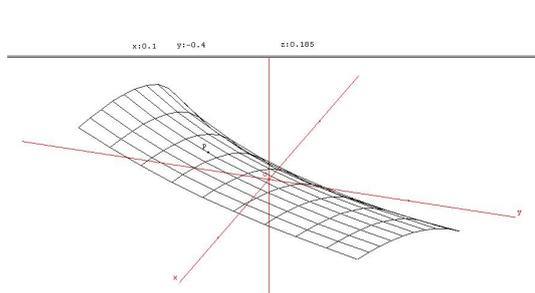
Supposons qu'il existe $x \in [-1; 1]$, $y \in [-1; 1]$ tels que $\frac{x-y}{x+y+3} < -\frac{2}{3}$, on a alors :

$$x - y < -\frac{2}{3}(x + y + 3) \iff x + \frac{2}{3}x - y + \frac{2}{3}y < -\frac{2}{3} \iff 5x - y < -6$$

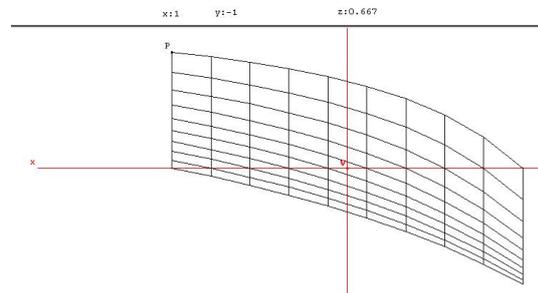
Or, cette dernière inégalité est impossible, étant donné $x \geq -1$ et $-y \geq -1$, on a en effet $5x - y \geq -6$

Un complément graphique :

On peut représenter dans l'espace les points P de coordonnées $(x; y; \frac{x-y}{x+y+3})$ pour $x \in [-1; 1]$ et $y \in [-1; 1]$:



vue en perspective



vue de face (y vers nous, z vers le haut)

Cette construction permet une aide à la conjecture de minorant (ici en fait un minimum) et de majorant (ici en fait un maximum), à savoir $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$.