Éléments de correction

Exercice 1 : / 8 points

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

> **Solution**
>
> **initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{2}{2\times 2+1} = \frac{2}{3}$; l'initialisation est vérifiée.
>
> **hérédité** : on suppose que pour un n fixé, la relation $u_n = \frac{2}{2n+1}$ est vérifiée.
> On veut alors montrer que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$
>
> $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} &&= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}} &&= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3} &&= \frac{2}{2n+3} \end{aligned}$$
>
> **conclusion** : l'initialisation pour $n = 1$ est vérifiée, l'hérédité est vérifiée : cela montre que pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

2. Étudier l'éventuel sens de variation de cette suite.

> **Solution**
>
> On cherche à déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:
>
> $$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2n+3} - \frac{2}{2n+1} = \frac{(4n+2)-(4n+6)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+1)}$$
>
> Il est clair que l'expression $\dfrac{-4}{(2n+3)(2n+1)}$ est négative (quotient dont le numérateur est négatif et le dénominateur est positif).
>
> Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ entier, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui montre que **la suite** (u_n) **est décroissante**.

3. Montrer que cette suite est bornée.

Solution

La suite étant décroissante, elle est majorée par son premier terme $u_1 = \frac{2}{3}$.

Par ailleurs, comme $u_n = \frac{2}{2n+1}$, on peut affirmer que $u_n > 0$

Ainsi, (u_n) est minorée par 0, majorée par $\frac{2}{3}$: **la suite est bornée**.

Exercice 2 : / 12 points

1. Justifier que : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant x$ » est faux.

Solution

Il suffit de trouver un contre exemple : en prenant $x = 0,25$, on montre que l'inégalité proposée est fausse.

2. On veut démontrer la proposition : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant x + 1$ ».

(a) Étudier le signe du trinôme $x^2 + x + 1$.

Solution

Le discriminant de ce trinôme étant négatif, celui-ci n'a pas de racine : il est de signe constant. Le coefficient devant x^2 étant positif, on conclut que l'expression $x^2 + x + 1$ est strictement positive, pour toute les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant x$

Solution

On vient de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \geqslant 0$; en ajoutant x de part et d'autre de cette inégalité, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant x$

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x + 1 \geqslant \sqrt{x}$

Solution

D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant x$, ce qui revient à écrire : $(x+1)^2 \geqslant x$.

Si on ne considère que les valeurs positives ou nulles de x, de part la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, on en déduit que : $\sqrt{(x+1)^2} \geqslant \sqrt{x^2}$

$x+1$ et x étant positifs, cela revient à écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x+1 \geqslant \sqrt{x}$

3. On se propose par la suite d'utiliser les propriétés de convexité / concavité des fonctions pour démontrer des inégalités plus intéressantes.

   On pose, pour tout réel x positif, $f(x) = \sqrt{x}$; on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

   (a) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Solution

Pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est donnée par :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ce qui donne : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ et donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

   (b) Étudier la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Solution

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f''(x) = -\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = -\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}$

Pour $x > 0$, on a donc $f''(x) < 0$ ce qui montre que f est concave sur sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Conclure quant à cette inégalité : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ »

Solution

f étant concave, sa courbe représentative se trouve en dessous de ses tangentes, en particulier la tangente en 1 qui a pour expression : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Ainsi, pour $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

4. En vous inspirant de la méthode de la question précédente, justifier que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1$

Solution

On procède de la même manière en utilisant la tangente au point d'abscisse 4 ; elle a pour expression :

$y = f'(4)(x-4)+f(4)$ ce qui donne : $y = \frac{1}{4}(x-4)+2$ et donc $y = \frac{1}{4}x+1$

Par concavité de la fonction racine sur $]0\ ;\ +\infty[$, on conclut que : $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1$