Chapitre 11

Lois de probabilité continues

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
définition d'une loi à densité						
utiliser une loi uniforme						
utiliser la loi exponentielle						
loi normale centrée réduite : calculs						
loi normale centrée réduite : valeurs remarquables						
loi normale à paramètres						

1) Lois de probabilité à densité

1 - 1) Introduction

Dans de nombreux domaines, on étudie des variables aléatoires pouvant prendre, **du moins théoriquement**, toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

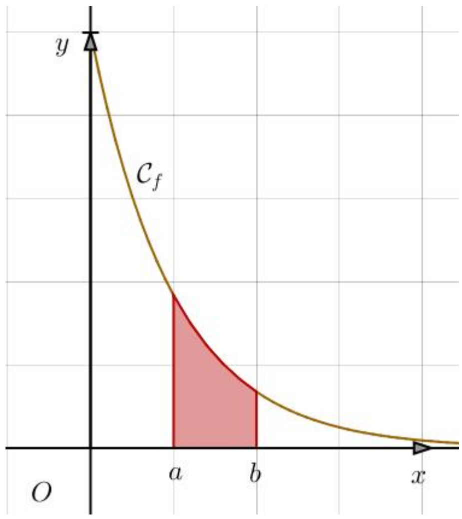
Ces variables sont dites **continues**.

EXEMPLE

On veut définir la variable aléatoire X qui, à tout téléviseur, associe sa durée de bon fonctionnement, exprimée en heures. Cette durée peut prendre toute valeur de l'intervalle $[0; 50\ 000]$.

On va chercher à calculer les probabilités $P(X \geqslant 10\ 000)$ ou $P(0 < X < 20\ 000)$. Pour cela, on utilise une fonction f définie sur I dont $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative dans un repère orthogonal :

la probabilité $P(a < X < b)$ est définie comme l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition :

On appelle **fonction de densité de probabilité** sur l'intervalle I, toute fonction f définie, continue et positive sur I, telle que l'intégrale de f soit égale à 1.

Une **variable aléatoire à densité** X sur un intervalle I est définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité f définie sur I. La probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a; b]$ de I est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a; b]$, soit $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

Propriétés :

Pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle I :

* $P(X = a) = 0$

* $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a)$ et $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leqslant a)$

* Pour une loi continue dans les calculs de probabilités, on peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement. Par exemple : $P(X < a) = P(X \leqslant a)$

1 - 2) Espérance mathématique

Rappel

Si une variable aléatoire X suit la loi de probabilité décrite ci-dessous :

X	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

son espérance mathématique est définie par : $E(X) = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_ia_i$

Rappel : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

La définition de l'espérance d'une variable aléatoire continue est à rapprocher de cette formule, l'intégrale « remplaçant » la somme du fait de la continuité.

Définition :

Soit X une variable aléatoire continue de densité f sur un intervalle $[a; b]$.

Alors l'espérance mathématique de X est le réel défini par

$$E(X) = \int_a^b tf(t)\, dt$$

2) Loi uniforme

2 - 1) Modèle

On souhaite modéliser le tirage d'un nombre aléatoire entre a et b, avec $a < b$ (comme peuvent le faire une calculatrice ou un tableur).

On admet que ce modèle correspond à une densité de probabilité constante sur l'intervalle $[a;b]$. On note $f(t) = k$ cette densité de probabilité.

Comme $\int_a^b f(t)\,dt = 1$, on obtient : $k \times (b-a) = 1$ et donc $k = \frac{1}{b-a}$.

Ainsi, le tirage au sort d'un nombre aléatoire entre a et b peut être modélise par une densité de probabilité $f(t) = \frac{1}{b-a}$.

Vérification de la cohérence du modèle :

On choisit deux nombres m et n tels que : $a \leqslant m < n \leqslant b$.

La probabilité que le nombre tiré au sort soit compris entre m et n est égale, selon le modèle à :

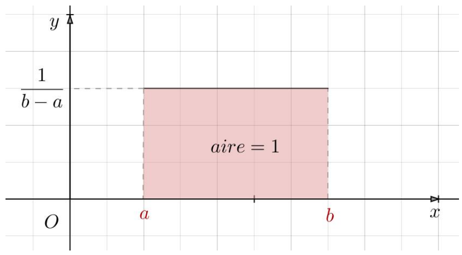
$$P(n < nombre < m) = \int_n^m f(t)\,dt = \int_b^m \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}[t]_m^n = \frac{n-m}{b-a}$$

Ce résultat est bien cohérent avec ce qu'on attendait avant d'avoir parlé de loi à densité.

2 - 2) Définition

Définition :

> Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a;b]$, de valeur $\frac{1}{b-a}$



Exemple :

On indique qu'en se promenant le dimanche matin, Monsieur P arrive devant le Pont des Arts, entre 9 h et 10 h 30.

On peut modéliser l'heure d'arriver de Monsieur P par une variable aléatoire H qui suit une loi uniforme de densité $\frac{1}{10,5-9} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$

Ainsi, la probabilité pour qu'il arrive entre 9 h 30 et 10 h sera égale à :

$$P(9,5 < H < 10) = \int_{9,5}^{10} \frac{2}{3}\,dt = \frac{2}{3} \times (10-9,5) = \frac{1}{3}$$

Ce résultat paraît bien cohérent avec l'intuition : on a une chance sur trois de se retrouver dans une plage horaire d'une demi heure, qui représente le tiers de la durée pendant laquelle Monsieur P peut arriver au Pont des Arts.

2 - 3) Espérance mathématique

Propriété :

Si une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme de densité $\dfrac{1}{b-a}$, alors son espérance mathématique est égale à

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

Démonstration :

$$E(X)=\int_a^b tf(t)\,dt=\int_a^b t\frac{1}{b-a}\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(a+b)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

Commentaire :

En interprétant l'espérance mathématique comme la « moyenne » de la valeur de la variable aléatoire, on est satisfait de trouver cette valeur pour l'espérance d'une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$!

En reprenant l'exemple de la balade de Monsieur P, on peut estimer « qu'en moyenne », il arrive à 9 h 45 devant le Pont des Arts.

3) Loi exponentielle

3 - 1) Modèle : loi de durée sans vieillissement

Prenons un exemple : notons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en années, d'un composant électronique. *A priori*, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout t de $[0; +\infty[$, « $X \geqslant t$ » est l'évènement « La durée de vie dépasse t années ».

On dit que la durée de vie de ce composant est **sans vieillissement** lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t ne dépend pas de t.

Cela se traduit par : la probabilité conditionnelle $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h)$ ne dépend pas de t.

Cette probabilité est donc égale, en particulier à $P_{X\geqslant 0}(X \geqslant h)$ (probabilité obtenue pour $t = 0$).

Or, $P_{X\geqslant 0}(X \geqslant h) = \dfrac{P(X \geqslant h \text{ et } X \geqslant 0)}{P(X \geqslant 0)}$; par définition, « $X \geqslant 0$ » est l'évènement certain donc de probabilité égale à 1 ; d'autre part, l'évènement « $X \geqslant h$ et $X \geqslant 0$ » est aussi l'évènement « $X \geqslant h$ ».

Donc, $P_{X\geqslant 0}(X \geqslant h) = P(X \geqslant h)$

Ainsi, pour tous nombres $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$, $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$

Nous dirons par définition :

Défintion :

une variable aléatoire à valeurs positives X suit une loi **sans vieillissement** (ou **sans mémoire**) lorsque pour tous nombres positifs t et h,

$$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

Exemple :

Si la durée de vie X d'un composant électronique est sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse dix ans sachant qu'il a déjà fonctionné sept ans est $P_{X\geqslant 7}(X \geqslant 10)$, soit avec $t = 7$ et $h = 3$, $P_{X\geqslant 7}(X \geqslant 7+3) = P(X \geqslant 3)$.

Autrement dit, le composant fonctionne « sans mémoire » des sept années passées.

Commentaire :

On peut démontrer (démonstration non accessible au niveau Terminale) que dans le cas d'une loi sans vieillissement, celle-ci s'écrit nécessairement sous la forme d'une loi exponentielle.

3 - 2) Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Défintion :

λ désigne un nombre strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle de paramètre λ** lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

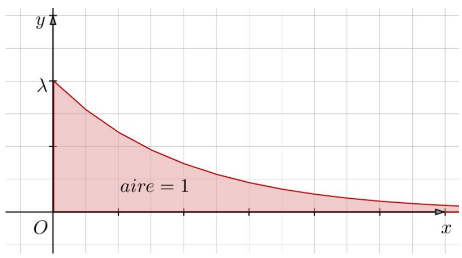
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Remarque :

On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$. En effet :

– la fonction f est continue et positive sur $[0;+\infty[$;

– pour tout nombre positif a, $\displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - (-1)$ et donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(t)\,dt = 1$, ce qui signifie que l'aire sous la courbe de f sur $[0;+\infty[$ est égale à 1.



3 - 3) Espérance mathématique

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. Sa densité f est définie sur $[0;+\infty[$.

On définit alors l'espérance mathématique de X par la limite suivante (lorsqu'elle existe) :

$$E(X) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a t\,f(t)\,dt$$

Théorème :

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration - $\boxed{\text{BAC}}$:

Par définition, pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(X) = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}\, dt$.

La difficulté de cette démonstration réside dans le fait de trouver une primitive à la fonction $g\ :\ t \mapsto \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}$.
Il faut retenir **par coeur** qu'une primitive de g est du type : $G(t) = a\, t\, e^{-\lambda\, t} + b\, e^{-\lambda\, t}$; reste à déterminer les paramètres a et b.

Il faut retenir le principe, les calculs qui suivent ne sont pas à retenir par coeur, mais vous devez être capable de les faire par vous même.

Pour trouver les paramètres a et b, on va dériver la fonction G et utiliser le fait que les fonctions G' et g sont identiques :

$G'(t) = a\, e^{-\lambda\, t} - \lambda\, a\, t\, e^{-\lambda\, t} - \lambda\, b\, e^{-\lambda\, t} = -\lambda\, a\, t\, e^{-\lambda\, t} + (a - \lambda\, b)e^{-\lambda\, t}$

Or, $G'(t) = g(t) = \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}$

Par identification, on trouve : $\lambda = -\lambda\, a$ *(ce qui se trouve devant $t\, e^{-\lambda\, t}$)* et $a - \lambda\, b = 0$ *(ce qui se trouve devant $e^{-\lambda\, t}$)*

On en déduit : $a = -1$ et $b = -\dfrac{1}{\lambda}$

Ainsi, $G(t) = -t\, e^{-\lambda\, t} - \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda\, t}$

On peut alors facilement exprimer $\displaystyle\int_0^a \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}\, dt$:

$$\int_0^a \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}\, dt = \left[-t\, e^{-\lambda\, t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\, t}\right]_0^a = \left(-ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a}\right) - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Or, $\lim\limits_{u \to -\infty} u\, e^u = 0$ (par croissances comparées), donc $\lim\limits_{a \to +\infty} -ae^{-\lambda a} = 0$ (par « composition » de limites)

Par ailleurs, $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = 0$ (par « composition » de limites)

Et donc, $\lim\limits_{a \to +\infty} \displaystyle\int_0^a \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$, ce qui est le résultat recherché.

4) Loi normale centrée réduite

4 - 1) Théorème de Moivre-Laplace

Ce théorème est un théorème fondamental en probabilités.

Il permet lorsque le nombre d'épreuves augmente, d'approcher une loi binomiale par une des principales lois de probabilité : la loi normale.

Théorème *admis* :

Soit $p \in]0;1[$. On suppose que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

4 - 2) Loi normale centrée réduite

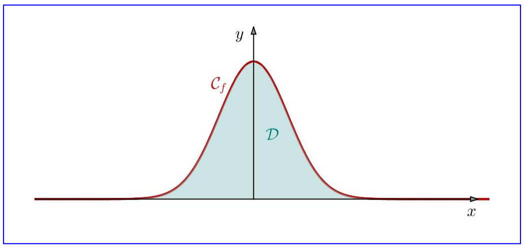
Définition :

La **loi normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0;1)$ est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

La fonction notée f continuera à désigner $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ dans les paragraphes 1. et 2. de ce cours.

Propriétés :

1. Le maximum de f est atteint en 0.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la densité de probabilité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. L'aire sous la courbe (le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure) est 1.



COMMENTAIRES :

1. La propriété 1. se démontre facilement, en dérivant la fonction f : $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}$

   Et donc, f est croissante sur $]-\infty;0]$, décroissante sur $[0;+\infty[$; elle atteint son maximum en 0 ; ce maximum est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2. $f(t) = f(-t)$: la fonction f est paire, ce qui justifie la propriété 2.

3. La propriété 3. ne se démontre pas du tout aisément, dans la mesure où **la fonction** f **n'admet pas de primitive exprimable par des fonctions connues**.

4 - 3) Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X suivant $\mathcal{N}(0;1)$

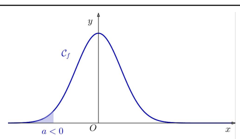
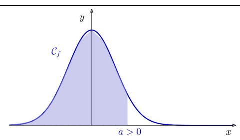
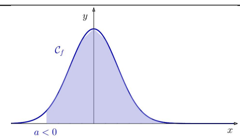
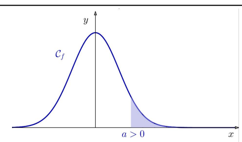
On doit utiliser la calculatrice pour déterminer ces probabilités (autrefois, on utilisait des *tables*).

	Casio	**TI**
Syntaxe	Touche $\boxed{\text{OPTN}}$, puis choisir *STAT*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu distrib (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$), puis choisir *normalFRép* ou *FracNormale*
$P(a < X < b)$	Choisir *Ncd* : **NormCD(a,b)**	**normalFRép(a,b)**
Nombre réel k **tel que** $P(X < k) = c$	Choisir *InvN* : **InvNormCD(c)**	**FracNormale(c)**

COMMENTAIRES :

* Du fait de la symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, on a : $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$.

* Les calculatrices ne fournissant que des probabilités sous la forme $P(a < X < b)$, on utilise la méthode décrite dans le tableau ci-dessous pour les calculs du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < 0$	$P(X < a)$ pour $a > 0$	$P(X > a)$ pour $a < 0$	$P(X > a)$ pour $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < 0)$	$0,5 + P(0 < X < a)$	$P(a < X < 0) + 0,5$	$0,5 - P(0 < X < a)$

On peut aussi être plus « pragmatique » et calculer $P(-10^{99} < X < 2)$ si on veut calculer $P(X < 2)$

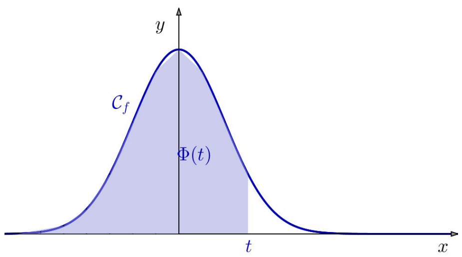
5) Propriétés de la loi normale centrée réduite

5 - 1) Règles de calcul

Pour simplifier les calculs avec la loi normale centrée réduite, on introduit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$.

Commentaire :

$\Phi(t)$ est la valeur de l'aire colorée :



Règles :

Pour tous réels a et b :

1. $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$
2. $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$

Démonstrations :

1. C'est une conséquence de la symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$. (voir figure 1 ci-contre)
2. $\Phi(-a) = P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$
   $= 1 - P(X < a) = 1 - \Phi(a)$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a)$
   $= P(X \leqslant a) - P(X < -a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$
   $= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$ (voir figure 2 ci-contre)

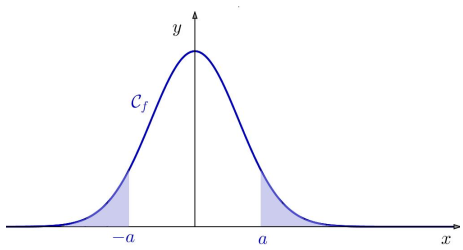


figure 1

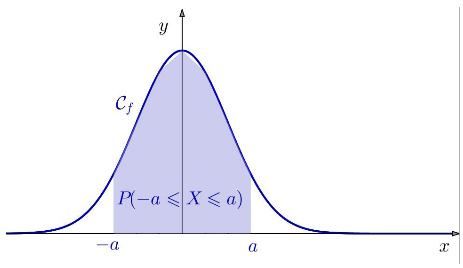


figure 2

5 - 2) Valeurs remarquables liées à la loi normale centrée réduite

Théorème :

> Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, alors il pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que :
> $$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration - BAC :

L'idée de cette démonstration est de montrer que si on fixe une valeur de probabilité donnée (c'est-à-dire ici qu'on fixe α), il n'existe qu'une seule valeur de t telle que $P(-t \leqslant X \leqslant t)$ soit égale à cette probabilité donnée par avance. La valeur de t dépend bien sûr de la valeur de α (c'est pour cela que la notation choisie dans la propriété rappelle α).

On va bien sûr utiliser le fait qu'on ait choisi deux valeurs opposées ($-t$ et t), ce qui confère une symétrie au problème.

Attention à ne pas se laisser « embrouiller » par les notations qui peuvent paraître compliquées, mais qui seront toujours les mêmes dans ce type de problème.

D'après la symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, on a pour tout réel t positif :

$$P(-t \leqslant X \leqslant t) = 2P(0 \leqslant X \leqslant t) = 2\int_0^t f(s)\,ds = 2H(t)$$

où H est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

La fonction H est donc continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} H(t) = \dfrac{1}{2}$ puisque cela correspond à l'aire sous la courbe pour $t \in [0;+\infty[$, c'est-à-dire $P(X \geqslant 0)$.

La fonction $2H$ est donc continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. On peut en dresser le tableau de variation :

t	0	$+\infty$
$2H$	0	$\nearrow$ 1

Pour tout réel α compris entre 0 et 1, le réel $1-\alpha$ est également compris entre 0 et 1.

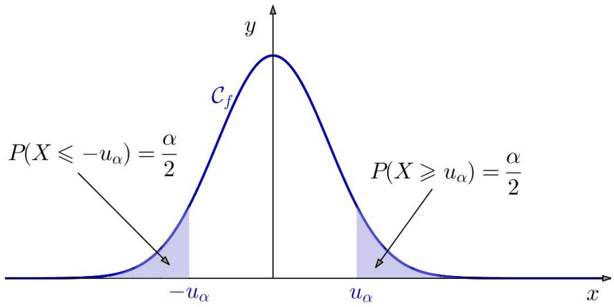
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel strictement positif que l'on note u_α tel que $2H(u_\alpha) = 1-\alpha$, c'est-à-dire tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$

Propriétés :

1. Une valeur approchée de $u_{0,05}$ est 1,96.
2. Une valeur approchée de $u_{0,01}$ est 2,58.

Démonstration :

$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ équivaut à $2\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$



Intuitivement, on rejette « symétriquement » une partie des probabilités aux deux extrémités.

Pour $\alpha = 0,05$: $\Phi(u_{0,05}) = 0,975$, d'où (avec la calculatrice), $u_{0,05} \approx 1,96$.

Pour $\alpha = 0,01$: $\Phi(u_{0,05}) = 0,995$, d'où (avec la calculatrice), $u_{0,01} \approx 2,58$.

Propriété :

> L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0 ; son écart-type est 1.

Démonstration *pour l'espérance mathématique* :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite est définie par :

$$E(X) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 t\ f(t)\ dt + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t\ f(t)\ dt$$

Posons $g(t) = t\ f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. La fonction G définie par $\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

On en déduit pour tous réels a et b :

$$\int_a^0 t\ f(t)\ dt = G(0) - G(a) \quad \text{et} \quad \int_0^b t\ f(t)\ dt = G(b) - G(0)$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{a \to -\infty} G(a) = \lim\limits_{b \to +\infty} G(b) = 0$, d'où $\displaystyle\int_a^0 t\ f(t)\ dt = G(0)$ et $\displaystyle\int_0^b t\ f(t)\ dt = -G(0)$

Finalement, $E(X) = 0$.

6) Lois normales

6 - 1) Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition :

Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif.

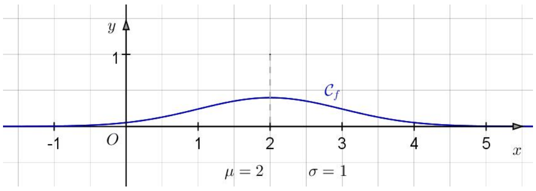
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

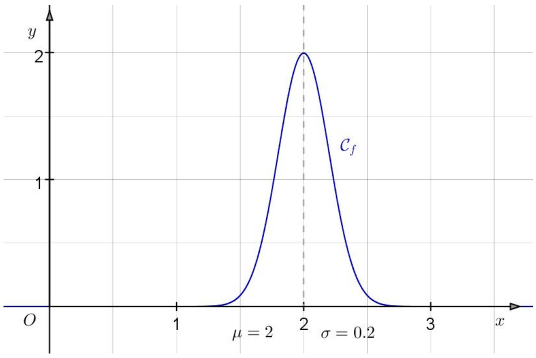
si, et seulement si,

la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Soit f la fonction densité de la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthogonal est une courbe « en cloche », symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, et d'autant plus « resserrée » autour de son axe de symétrie que σ est petit.





Propriété - *admise* :

Si X suit une la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors son espérance mathématique est égale à μ et son écart-type est σ.

6 - 2) Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

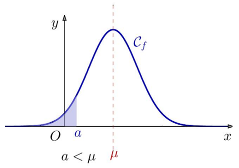
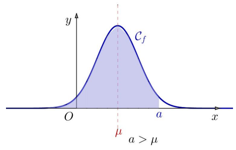
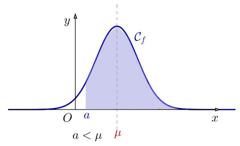
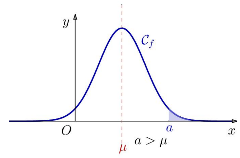
On doit utiliser la calculatrice pour déterminer ces probabilités, de la même manière que ce qui a été vu pour la loi normale centrée réduite ; il faudra ajouter les paramètres μ et σ (**dans le bon ordre !**).

	Casio	**TI**
Syntaxe	Touche $\boxed{\text{OPTN}}$, puis choisir *STAT*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu distrib (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$), puis choisir *normalFRép* ou *FracNormale*
$P(a < X < b)$	Choisir *Ncd* : **NormCD(a,b,σ,μ)**	**normalFRép(a,b,μ,σ)**
Nombre réel k tel que $P(X < k) = c$	Choisir *InvN* : **InvNormCD(c,σ,μ)**	**FracNormale(c,μ,σ)**

COMMENTAIRES :

* Comme pour la loi normale centrée réduite, on a du fait de la symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, on a : $P(X \leqslant \mu) = P(X \geqslant \mu) = 0,5$.

* Les calculatrices ne fournissant que des probabilités sous la forme $P(a < X < b)$, on utilise la méthode décrite dans le tableau ci-dessous pour les calculs du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < \mu$	$P(X < a)$ pour $a > \mu$	$P(X > a)$ pour $a < \mu$	$P(X > a)$ pour $a > \mu$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < \mu)$	$0,5 + P(\mu < X < a)$	$P(a < X < \mu) + 0,5$	$0,5 - P(\mu < X < a)$

Comme pour la loi normale centrée réduite, on peut être plus « pragmatique » et calculer $P(0,7 < X < 10^{99})$ si on veut calculer $P(X > 0,7)$

6 - 3) Les intervalles « Un, deux, trois sigma »

Propriétés :

1. $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$
2. $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
3. $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Démonstration :

$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = P(-\sigma \leqslant X - \mu \leqslant \sigma) = P\left(-1 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1\right) = P(-1 \leqslant Y \leqslant 1)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

D'où $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0,683$.

De même :

* $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,954$

* $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0,997$