Cours de mathématiques pour la Terminale S

Savoir-Faire par chapitre

Florent Girod [1]

Année scolaire 2015 / 2016

1. Externat Notre Dame - Grenoble

Table des matières

1) Suites numériques . . . 3
   1 - 1) effectuer un raisonnement par récurrence . . . 3
   1 - 2) démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique . . . 3
   1 - 3) étudier la monotonie d'une suite . . . 3
   1 - 4) démontrer qu'une suite admet une limite . . . 3
   1 - 5) déterminer la limite d'une suite . . . 3
2) Limites et continuité . . . 4
   2 - 1) déterminer la limite d'une fonction à l'infini . . . 4
   2 - 2) déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a . . . 4
   2 - 3) utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue 4
3) Compléments sur les fonctions numériques . . . 5
   3 - 1) dériver des fonctions . . . 5
   3 - 2) connaître et utiliser les fonctions sinus et cosinus . . . 5
4) Fonction exponentielle . . . 6
   4 - 1) propriétés numériques de la fonction exponentielle . . . 6
   4 - 2) propriétés de la fonction exponentielle . . . 6
   4 - 3) calculs de limites avec la fonction exponentielle . . . 6
   4 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle . . . 6
   4 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle . . . 6
5) Fonction logarithme népérien . . . 7
   5 - 1) fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle . . . 7
   5 - 2) propriétés numériques de la fonction logarithme népérien . . . 7
   5 - 3) calculs de limites avec la fonction logarithme népérien . . . 7
   5 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien 8
   5 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien . . . 8
6) Calcul intégral . . . 9
   6 - 1) intégrale et aire sous la courbe . . . 9
   6 - 2) détermination de primitives de fonctions . . . 9
   6 - 3) propriétés de l'intégrale . . . 9
   6 - 4) valeur moyenne d'une fonction . . . 10
7) Les nombres complexes . . . 11
   7 - 1) forme algébrique d'un nombre complexe . . . 11
   7 - 2) résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 11
   7 - 3) forme exponentielle d'un nombre complexe . . . 11
   7 - 4) interprétation géométrique d'un nombre complexe . . . 11
8) Droites et plans de l'espace - Vecteurs . . . 12
   8 - 1) étude de la position relative de droite(s) et de plan(s) . . . 12
   8 - 2) vecteurs de l'espace . . . 12

8 - 3) formules dans un repère de l'espace 12
8 - 4) représentation paramétrique d'une droite, d'un plan 12
9) Produit scalaire de l'espace 13
9 - 1) calculs de produits scalaires 13
9 - 2) équation cartésienne d'un plan 13
9 - 3) intersection de droites et de plan 13
10) Probabilités conditionnelles 14
10 - 1) modéliser une situation (par un arbre par exemple) 14
10 - 2) utiliser la formule des probabilités totales 14
10 - 3) indépendance de deux évènements 14
11) Lois de probabilité continues 15
11 - 1) définition d'une loi à densité 15
11 - 2) utiliser la loi uniforme 15
11 - 3) utiliser la loi exponentielle 15
11 - 4) loi normale centrée réduite : calculs 15
11 - 5) loi normale centrée réduite : valeurs remarquables 16
11 - 6) loi normale à paramètres 16
12) Échantillonnage et estimation 17
12 - 1) centrer et réduire une loi binomiale 17
12 - 2) déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique 17
12 - 3) déterminer et utiliser un intervalle de confiance 17

1) Suites numériques

1 - 1) effectuer un raisonnement par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = r.u_n$, où r est un réel quelconque.

Démontrer que pour tout nombre entier n, $u_n = r^n$

1 - 2) démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique

Soit (p_n) la suite définie pour tout nombre entier supérieur à 1 par : $p_1 = \frac{4}{5}$ et $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$: montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

En déduire une expression de u_n puis de p_n (n entier supérieur à 1)

1 - 3) étudier la monotonie d'une suite

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par :
– $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$
– $v_n = n^2 + 3n - 1$
Étudier la monotonie de ces suites.

1 - 4) démontrer qu'une suite admet une limite

Soit (u_n) la suite définie par :
* $u_0 = 0$
* $u_1 = 0,1$
* $u_2 = 0,11$
* $u_3 = 0,111$

...

* $u_n = 0,\underbrace{111\ldots1}_{n\ fois}$

Étudier la convergence de la suite (u_n)

1 - 5) déterminer la limite d'une suite

Déterminer les limites suivantes :
– $\lim \frac{(-1)^n}{n}$
– $\lim n + (-1)^n$
– $\lim \frac{n^2+3n-1}{5-n^2}$
– $\lim \frac{1}{5} + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n$

2) Limites et continuité

2 - 1) déterminer la limite d'une fonction à l'infini

Déterminer les limites suivantes :
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}$
- $\lim_{x\to+\infty} x+\sin(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

2 - 2) déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a

Déterminer les limites suivantes :
- $\lim_{x\to1^-} \dfrac{5-x}{1-x}$
- $\lim_{x\to1} \dfrac{5-x}{(1-x)^2}$
- $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$

2 - 3) utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue

En étudiant le fonction $f(x)=2x^3+3x^2-36x-20$, justifier que l'équation $f(x)=1$ admet trois solutions, dont on donnera un encadrement à partir du tableau de variation ; peut-on donner les valeurs exactes ?

Mêmes questions avec l'équation $f(x)=100$

3) Compléments sur les fonctions numériques

3 - 1) dériver des fonctions

Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{1-x}$
- $f(x) = (1-x)^3$
- $f(x) = e^{x^2-3x+1}$
- $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

3 - 2) connaître et utiliser les fonctions sinus et cosinus

Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

4) Fonction exponentielle

4 - 1) propriétés numériques de la fonction exponentielle

simplifier le plus possible les écritures suivantes :

* $\dfrac{e^7}{e^5}$
* $\dfrac{e^7 - e^5}{e^5}$
* $(e^4)^2.e^5$
* $e^{-13}.e^{10}$

4 - 2) propriétés de la fonction exponentielle

Écrire toutes les propriétés de la fonction exponentielle.

Les démontrer à partir de la relation $e^{a+b} = e^a.e^b$

4 - 3) calculs de limites avec la fonction exponentielle

Déterminer les limites suivantes :

– $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x}$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^x}$

4 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x^2+2x+3}$

1. Étudier les variations de f
2. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition

4 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle

Résoudre les équations suivantes :

1. $10 - 3e^{-x} > 0$
2. $1 - 0,3^n \geq 0,9$

5) Fonction logarithme népérien

5 - 1) fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 8$
2. $e^{x^2} = 8$
3. $ln(x) = ln(x + 8)$
4. $ln(x) = -4$
5. $ln(2x) = ln(x - 1)$

5 - 2) propriétés numériques de la fonction logarithme népérien

Exprimer les nombres suivants en fonction de ln(x) (où x est un réel strictement positif) :

1. $ln\left(x^4\right)$
2. $ln\left(\frac{e}{x}\right)$
3. $ln\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)$
4. $ln\left(e.x\right)$
5. $ln\left(\frac{e}{\sqrt{x}}\right)$

5 - 3) calculs de limites avec la fonction logarithme népérien

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to+\infty} ln\left(x^2 - 5x + 3\right)$
3. $\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x^2+5x-2}{2x^2-3}\right)$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x+1}$
5. $\lim_{x\to 0} x.ln(x)$

5 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

1. domaine de définition
2. parité ?
3. limite aux bornes
4. sens de variation
5. extremum ?
6. équation de la tangente en 0

5 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien

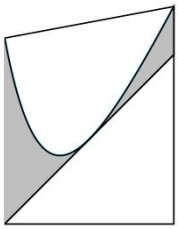
Résoudre les équations suivantes :

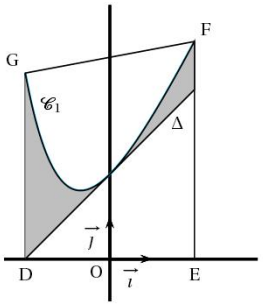
1. $1 - (0,7)^n > 0,95$
2. $e^x = 8$
3. $e^{2x} + e^x - 1 = 0$

6) Calcul intégral

6 - 1) intégrale et aire sous la courbe

La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ qui représente la fonction $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ et de la droite Δ d'équation $y = x + 2$ (comme l'indique la figure de droite ci-dessous). Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :
- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;\,0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

Déterminer l'aire de cette zone grisée (exprimée en unités d'aire).

6 - 2) détermination de primitives de fonctions

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x(x^2 - 3)^2$
2. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2 - 4}$
3. $h(x) = \dfrac{x + 3}{(x^2 + 6x - 7)^3}$
4. $i(x) = e^{-3x}$
5. $j(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x - 5}}$

6 - 3) propriétés de l'intégrale

1. Comment calculer $\int_5^4 t^2 dt$?
2. Calculer (astucieusement !) $\int_0^5 t^2 dt + \int_0^5 (1 - t^2) dt$
3. Démontrer que si $f \geq g$ sur [a ;b], alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

6 - 4) valeur moyenne d'une fonction

Déterminer la valeur moyenne de la fonction proposée, sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$
2. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 0]$
3. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 1]$
4. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 5]$
5. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 8]$

7) Les nombres complexes

7 - 1) forme algébrique d'un nombre complexe

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$

Donner la forme algébrique de :

1. $z_3 = z_1 - z_2$
2. $z_4 = z_1.z_2$
3. $z_5 = \dfrac{z_1}{z_2}$

7 - 2) résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On cherche à résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

1. Donner les valeurs des réels a et b tels que $z^3 + 8 = (z - 2)(z^2 + az + b)$
2. Résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

7 - 3) forme exponentielle d'un nombre complexe

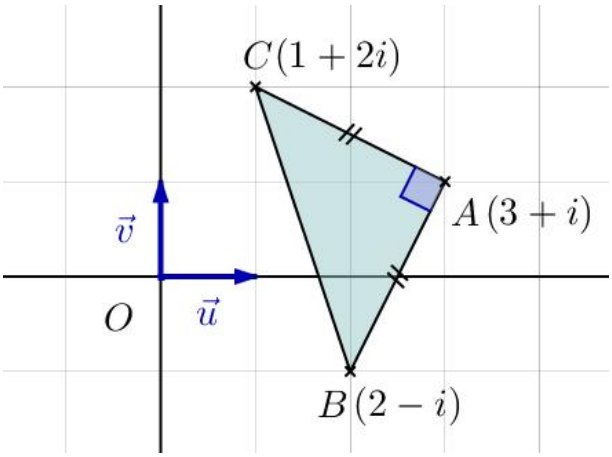
1. donner la forme algébrique de $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. donner la forme exponentielle de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et de $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
3. donner la forme exponentielle de $z = -5\Big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\ \sin(\frac{\pi}{5})\Big)$

7 - 4) interprétation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i,\ z_B = 2 - i \text{ et } z_C = 1 + 2i$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.



8) Droites et plans de l'espace - Vecteurs

8 - 1) étude de la position relative de droite(s) et de plan(s)

A partir d'un cube, et des milieux des arêtes :

– donner deux droites coplanaires (deux types à identifier)

– donner deux droites **non sécantes et non parallèles**

– donner une droite et un plan parallèles (deux cas de figure)

– donner une droite et un plan sécants

– donner deux plans sécants

– donner deux plans parallèles

8 - 2) vecteurs de l'espace

Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1)$ sont-ils colinéaires ?

Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(2;-2;1)$ et $\vec{w}(7;2;11)$ sont-ils coplanaires ?

8 - 3) formules dans un repère de l'espace

– Formules à retenir dans un repère du plan (et leurs conditions d'application)

– Application au cube (longueur de la diagonale par exemple).

8 - 4) représentation paramétrique d'une droite, d'un plan

Donner l'équation de la droite passant par $A(0;2;-1)$ et dirigée par $\vec{u}(1;-2;3)$

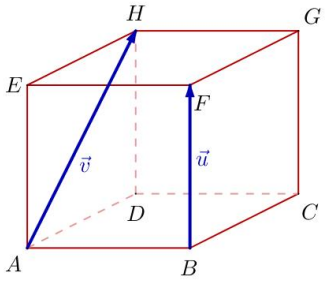
Dire si le point $B(1;2;5)$ appartient à cette droite ou pas.

9) Produit scalaire de l'espace

9 - 1) calculs de produits scalaires

Déterminer $\vec{u}.\vec{v}$:

* en se ramenant à un problème plan ;
* en décomposant les vecteurs (par une relation de Chasles) ;
* en utilisant les coordonnées dans un repère orthonormé.



9 - 2) équation cartésienne d'un plan

Soient $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ trois points du plan ; justifier que ces points définissent un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

9 - 3) intersection de droites et de plan

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z = 2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique
$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$ Montrer que $\mathcal{D}$ est (strictement) parallèle à $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z = 2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique
$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

10) Probabilités conditionnelles

10 - 1) modéliser une situation (par un arbre par exemple)

Une urne contient trois boules bleues et une noire. On effectue un tirage sans remise jusqu'à obtenir la boule noire. On note R le rang de sortie de la boule noire. Donner la loi de probabilité de R. (on pourra utiliser un arbre pour illustrer cette propriété)

Remarque : les boules sont indiscernables au toucher.

Pour aller plus loin : que se passe-t-il s'il y a remise ?

10 - 2) utiliser la formule des probabilités totales

On a trois boules rouges et une noire. On effectue un tirage : si la boule est noire, on la remet et on effectue un nouveau tirage. Si la boule est rouge, on la garde et on effectue un nouveau tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage ?

10 - 3) indépendance de deux évènements

Deux approches :
- une approche « intuitive » où l'on justifie qu'il y a indépendance de réalisation d'événements ;
- une approche numérique où un calcul justifie que deux événements sont indépendants ou non.

1. Donner une situation où deux événements apparaissent indépendants.

2. Soit la situation suivante : on considère les nombres entiers de 1 à 100.
   - on note A l'événement « le nombre est pair » ;
   - on note B l'événement « le nombre est un multiple de 5 ».

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   Même question si on considère les nombres entiers de 1 à 101.

11) Lois de probabilité continues

11 - 1) définition d'une loi à densité

1. Déterminer la valeur de k pour que la fonction $f(x) = k.x^2$ soit une loi à densité sur l'intervalle $[1\ ;\ 8]$
2. On se place sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: existe-t-il une valeur de k telle que $f(x) = \frac{k}{x^2}$ soit une loi à densité ?
3. On se place sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: existe-t-il une valeur de k telle que $f(x) = \frac{k}{x}$ soit une loi à densité ?

11 - 2) utiliser la loi uniforme

Monsieur Lettré achète son journal de l'après-midi du lundi au vendredi entre 16 h et 16 h 30 devant son domicile.

L'heure d'achat du journal suit une loi uniforme sur l'intervalle $[16\ ;\ 16,5]$

1. Quelle est la densité définissant la loi de probabilité pour l'heure d'achat du journal ?
2. Lundi midi : quelle est la probabilité que M Lettré achète son journal entre 16 h 20 et 16 h 30 ?
3. Vendredi 16 h 15 : le gérant du kiosque n'a pas encore vu M Lettré. Quelle est la probabilité que celui-ci achète son journal entre 16 h 20 et 16 h 30.
4. Mercredi, 15 h : à quelle heure le gérant peut-il « espérer » voir M Lettré ?

11 - 3) utiliser la loi exponentielle

– X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; sachant que $P(X < 4) = 0,3$, donner la valeur de λ.
– Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; sachant que $E(Y) = 7$, donner la valeur de λ.
– Démontrer qu'une loi exponentielle est une loi sans vieillissement.

11 - 4) loi normale centrée réduite : calculs

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Calculer :

1. $P(X < 2)$
2. $P(1 < X < 2)$
3. $P(X > 1)$
4. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(X < k) = 0,9$
5. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k < X < k) = 0,95$

11 - 5) loi normale centrée réduite : valeurs remarquables

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

1. A quoi est égal $P(-1 < X < 1)$?
2. Donner la valeur du réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k < X < k) = 0,95$
3. A quoi est égal $P(-3 < X < 3)$?

11 - 6) loi normale à paramètres

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 25)$.

1. Calculer $P(5 < X < 15)$; comment contrôler ce résultat (sans faire de calcul) ?
2. Calculer $P(X < 15)$
3. Calculer $P(5 < X)$
4. Vérifier la cohérence de ces trois calculs.

12) Échantillonnage et estimation

12 - 1) centrer et réduire une loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,12$, quelle variable « centrée réduite » lui est associée ?

12 - 2) déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique

On vous indique que 12 % des personnes sont des gauchers. Que peut-on penser du fait qu'il y ait 8 gauchers parmi les 50 premiers du classement ATP de Tennis ? (on pourra utiliser un intervalle de fluctuation pour argumenter la réponse).

12 - 3) déterminer et utiliser un intervalle de confiance

Un sondage précédent le second tour d'élections présidentielles indique que le candidat A a 51 % des intentions de vote. Sachant que le sondage a interrogé 1 000 personnes, montrer que l'on n'est pas sûr que le candidat A sera effectivement élu.

Combien de personnes aurait-il fallu interroger (avec un résultat de sondage identique) pour « être sûr » que ce candidat soit vainqueur au second tour ?