***Exercice* 1** :

Soient deux événements A et B tels que : $p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,3$

1. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que A et B sont indépendants.

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$ (on peut faire le produit car les événements sont indépendants.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$

2. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que A et B sont incompatibles.

$p(A \cap B) = 0$ car, A et B étant incompatibles, $A \cap B = \emptyset$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0 = 0,7$

***Exercice* 2** :

Le dépistage de l'hyperthyroidie s'effectue par un test basé sur le dosage de la TSH.

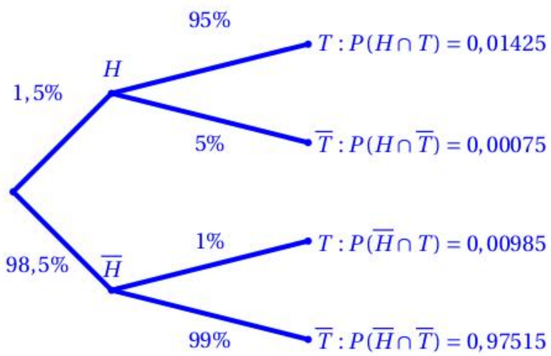
Les résultats sont les suivants :
– chez les malades, 95 % de tests sont positifs ;
– chez les non malades, 99 % de tests sont négatifs.

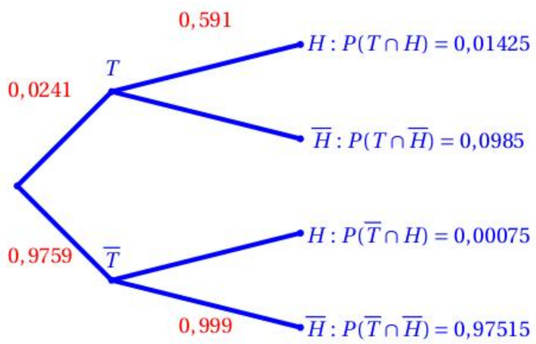
Sachant que la fréquence (on appelle prévalence) de l'hyperthyroidie dans la population est de 1,5 %, on cherche à déterminer :
– la probabilité d'être malade sachant que le test est positif (on appelle cela la valeur prédictive positive du test) ;
– la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négatif (on appelle cela la valeur prédictive négative du test)

On note H l'évènement « être atteint d'hypertyroidie » et T l'évènement « avoir un test positif au test ».

1. Le but cette question est de calculer la la valeur prédictive positive du test.

a. Construire **deux** arbres pondérés modélisant la situation et noter sur les branches les probabilités issues de la consigne.





b. Pourquoi a-t-on le droit d'écrire : $P(T) = P(T \cap H) + P(T \cap \overline{H})$?
C'est l'application de la formule des **probabilités totales**.

c. Calculer la valeur de $P(T)$.
$P(T) = P(T \cap H) + P(T \cap \overline{H}) = P(H).P_H(T) + P(\overline{H}).P_{\overline{H}}(T) = 0,015 \times 0,95 + 0,985 \times 0,01 = 0,01425 + 0,00985 = 0,0241$

d. En déduire la valeur de $P_T(H)$; a-t-on répondu à la question posée ?
$P_T(H).P(T) = P(T \cap H)$, ce qui donne numériquement :

$0,0241 P_T(H) = 0,01425$ d'où : $P_T(H) \approx 0,591$

$P_T(H)$ est bien la valeur prédictive positive du test : la probabilité d'être malade sachant que l'on a un test positif.

2. Le but cette question est de calculer la valeur prédictive négative du test.

a. Traduire par une expression faisant intervenir une probabilité conditionnelle le résultat cherché dans cette question.
La valeur prédictive négative du test est : $P_{\overline{T}}(\overline{H})$.

b. Comment calculer facilement $P(\overline{T})$?
En passant par l'événement contraire : $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 0,9759$

c. Déterminer la valeur de $P(\overline{T} \cap \overline{H})$.
$P(\overline{T} \cap \overline{H}) = P(\overline{H}).P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0,985 \times 0,99 = 0,97515$

d. En déduire la réponse à la question.
On a $P(\overline{T} \cap \overline{H}) = P(\overline{T}).P_{\overline{T}}(\overline{H})$, ce qui donne numériquement :

$0,9759P(\overline{T}) = 0,97515$ d'où $P_{\overline{T}}(\overline{H}) \approx 0,999$

Deux remarques sur les valeurs numériques trouvées :
- la valeur prédictive négative est très proche de 1 : c'est nécessaire, parce qu'une personne qui a un test négatif est « renvoyée » chez elle ; elle doit être assurée d'être en bonne santé.
- le fait que la valeur prédictive positive ne soit pas si proche de 1 que cela n'est pas dramatique : il faudra poursuivre les examens pour s'assurer que la personne est en bonne santé ou effectivement malade.

Dans l'idéal, il faudrait des valeurs prédictives toutes deux presqu'égales à 1. Mais si techniquement ce n'est pas possible, autant que ce soit la valeur prédictive positive qui soit un peu moins optimisée pour les raisons évoquées précédemment.