

## Activité sur des modèles d'évolution de population (extrait du livre Math'x)

En Alsace, on dénombre dans une réserve naturelle 270 pies sur 60 km<sup>2</sup>. Nous allons modéliser l'évolution à long terme de cette population. On admet que le milieu ne permet pas d'avoir plus de 1000 individus et on note  $p_n$  le rapport  $\frac{P_n}{1000}$  où  $P_n$  désigne la population au bout de  $n$  années. On a donc  $p_0 = \dots$

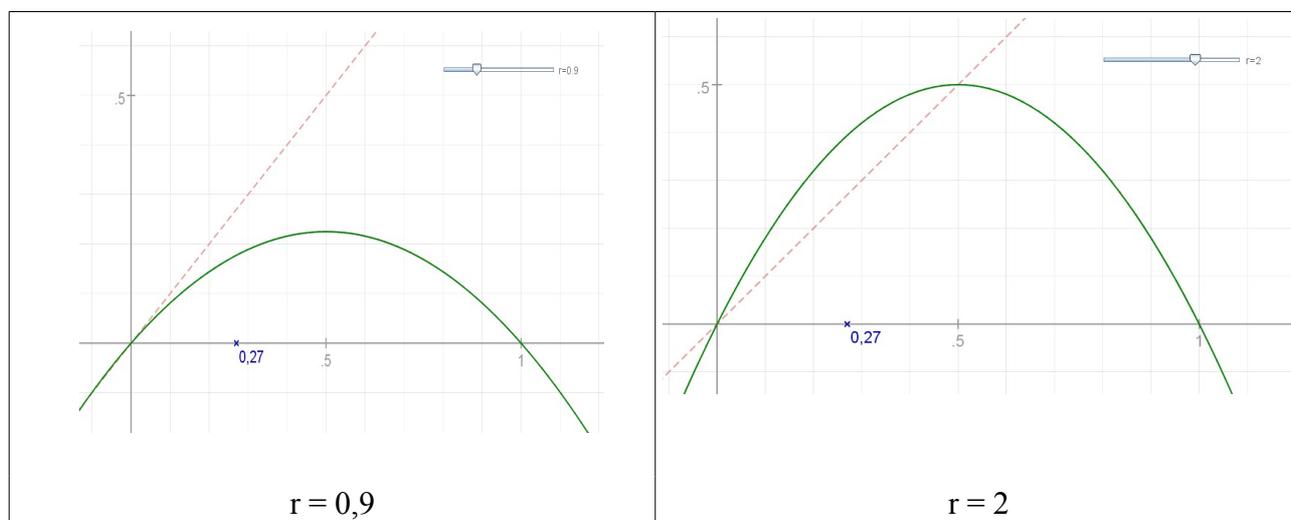
### A - premier modèle

On suppose que la population sur cette réserve augmente de 10 % chaque année. Quelle est la nature de la suite  $(p_n)$  ? Pourquoi ce modèle n'est-il pas réaliste ?

### B - le modèle logistique

On choisit le modèle suivant : pour tout  $n \geq 0$   $p_{n+1} = rp_n(1-p_n)$  où  $r$  est une constante (strictement positive) interprétée comme le facteur de croissance de la population.

- 1) on représente ci-dessous la fonction  $f(x) = rx(1-x)$  pour différentes valeurs de  $r$ , et la droite d'équation  $y=x$ . Émettre des conjectures sur l'évolution de la population dans chaque cas.
- 2) Étude pour  $0 < r < 1$ 
  1. montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq p_n \leq r^n$
  2. en déduire la limite de la suite  $(p_n)$  ; conclure quant à l'évolution de la population de pies dans ce cas.
- 3) Étude pour  $r=1$ 
  1. montrer que pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq p_n \leq 1$
  2. étudier le signe de  $p_{n+1} - p_n$  pour tout entier  $n$
  3. en déduire que  $(p_n)$  converge. Soit  $l$  sa limite.
  4. montrer que  $l(1-l)=l$  puis en déduire  $l$ .  
Que peut-on en déduire par rapport à l'évolution de cette population ?
- 4) Étude pour  $1 < r \leq 2$ 
  1. montrer que la suite  $(p_n)$  converge et déterminer sa limite.
  2. Interpréter en termes d'évolution de la population.



Pour aller plus loin : vous pouvez explorer avec une calculatrice ou un logiciel le comportement de la suite  $(p_n)$  pour  $r = 3,2$  ; pour  $r = 3,5$ . Pour  $r = 4$ , on dit que la suite est « chaotique » (ce terme a une signification en mathématiques).