une réponse au paradoxe de Monty Hall

Supposons que le candidat ait choisi la porte n°3.

On note
- F_i : « la voiture se trouve derrière la porte i » ;
- O_i : « le présentateur ouvre la porte i ».

Il est bien évident que $p(F_3) = \dfrac{1}{3}$: sans changement, la probabilité de gagner est de une chance sur trois.

On cherche à évaluer $p_{O_1}(F_2)$ (ce serait la même chose pour $p_{O_2}(F_1)$).

$p_{O_1}(F_2) = \dfrac{p(F_2 \cap O_1)}{p(O_1)} = \dfrac{p_{F_2}(O_1) \cdot p(F_2)}{p(O_1)}$

Par ailleurs, $p(O_1) = p_{F_1}(O_1) \cdot p(F_1) + p_{F_2}(O_1) \cdot p(F_2) + p_{F_3}(O_1) \cdot p(F_3)$ (formule des probabilités totales)

Cela donne numériquement : $p(O_1) = 0 \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi : $p_{O_1}(F_2) = \dfrac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

Sachant que l'animateur a ouvert la porte 1, la probabilité que la voiture se trouve derrière la non choisie au départ par le candidat (la porte 2) est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, en changeant le choix initial, la probabilité de gagner passe de $\dfrac{1}{3}$ à $\dfrac{2}{3}$ (ce qui est cohérent avec les simulations faites sur tableur).