Chute libre en mécanique

Le but de ce document est d'en finir avec les difficultés mathématiques sur les équations horaires présentées en sciences physiques.

Deux parties :

1. des explications liées aux mathématiques ;

2. le problème de mécanique présenté sur un exemple.

1 Ce qu'il faut savoir en maths en préambule

1.1 fonctions dont on connaît la dérivée

– Si une fonction a pour dérivée la fonction nulle, alors elle est constante.

– Si une fonction a pour dérivée une constante, alors elle est affine.

– Si une fonction a pour dérivée une fonction affine, alors c'est un polynôme du second degré.

Formulation avec des notations :

– Si $f'(x) = 0$, alors $f(x) = k$

– Si $f'(x) = k_1$, alors $f(x) = k_1 x + k_2$

– Si $f'(x) = k_1 x + k_2$, alors $f(x) = \frac{1}{2}k_1 x^2 + k_2 x + k_3$

1.2 Fonction vectorielle

On connaît depuis le collège les fonctions numériques, celles qui à un nombre associe un nombre.

On définit ici rapidement la notion de **fonction vectorielle**, qui à un nombre associe un vecteur.

Avec des notations de maths habituelles, on aurait la fonction $\vec{f}$ qui au nombre réel x associe le vecteur $\vec{f}(x)$.

On peut noter $\vec{f} : x \mapsto \vec{f}(x)$

Il existe un moyen bien commode de se ramener à des choses connues (des fonctions numériques) en utilisant les coordonnées du vecteur dans un repère. C'est ce qu'on va faire en se plaçant dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ dans lequel on va étudier chaque coordonnée du vecteur $\vec{f}(x)$:
– la coordonnée selon l'axe $(O\,;\,\vec{i})$, notée habituellement f_x ;
– la coordonnée selon l'axe $(O\,;\,\vec{j})$, notée habituellement f_y ;
– la coordonnée selon l'axe $(O\,;\,\vec{k})$, notée habituellement f_z.

Traiter une fonction vectorielle dans l'espace (3 dimensions) est équivalent à traiter 3 fonctions numériques (les fonctions « coordonnées »).

1.3 Notations pour la dérivation

En mathématiques, les notations habituelles d'une fonction sont les suivantes : on note la fonction par une lettre (souvent, la lettre f) et la variable par une lettre (souvent, la lettre x) ; on dérive la fonction par rapport à la variable x et on note la fonction dérivée f' : il n'y a pas d'ambiguïté.

En physique, une fonction peut dépendre de plusieurs variables (le temps, la température, la pression ...) et on peut avoir besoin de préciser par rapport à quelle variable on dérive. On a donc besoin d'une notation plus précise, pour lever les éventuelles ambiguïtés.

Ainsi, on précise la variable par rapport à qui a lieu la dérivation par la notation $\frac{d}{dt}$ (ici, on dérive par rapport à la variable t)

On peut retenir le lien entre les deux notations (maths et physique) : $\frac{df}{dt} = f'(t)$

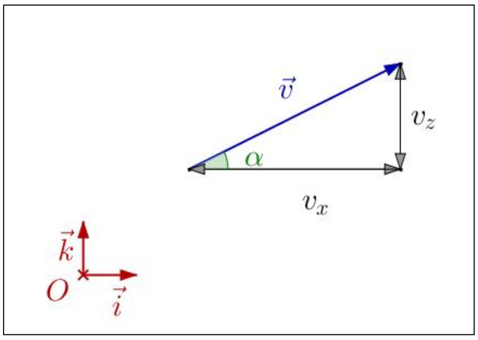
1.4 Projection d'un vecteur dans un repère

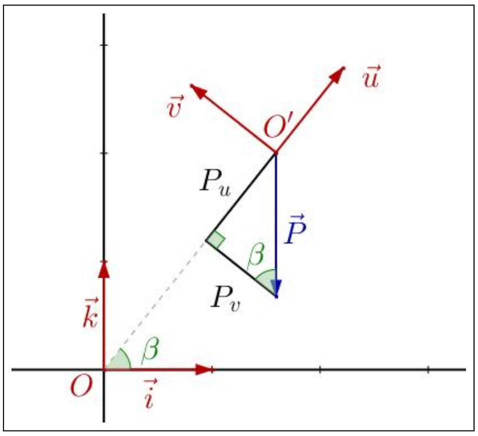
Sur l'exemple de la figure ci-contre, le vecteur $\vec{v}$ peut se décomposer selon ses composantes sur les axes du repère :

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_z \cdot \vec{k}$$

On peut aussi utiliser une relation trigonométrique pour exprimer v_x et v_z en fonction de $||\vec{v}|| = v$ et de l'angle α :

$$\boxed{v_x = v \cdot \cos(\alpha) \text{ et } v_z = v \cdot \sin(\alpha)}$$





Sur l'exemple de la figure ci-contre, le vecteur $\vec{P}$ peut se décomposer selon ses composantes sur les axes du repère $(O'\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$:

$$\vec{P} = P_u \cdot \vec{u} + P_v \cdot \vec{v}$$

On peut aussi utiliser une relation trigonométrique pour exprimer P_u et P_v en fonction de $||\vec{P}|| = P$ et de l'angle β :

(Cet angle se retrouve par des considérations géométriques)

Attention ici au signe de la projection (si on projette dans le sens inverse des axes)

$$\boxed{P_u = -P \cdot \sin(\beta) \text{ et } P_v = -P \cdot \cos(\beta)}$$

2 La situation physique

2.1 Situation

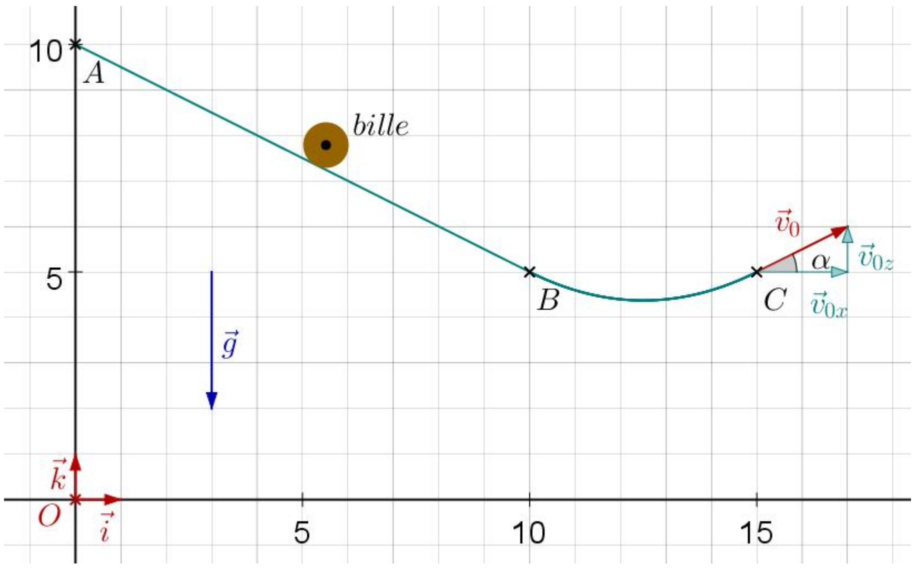
Une bille est lâchée d'un plan incliné qui se termine par une partie qui remonte (type, tremplin de saut à ski). On veut connaître la trajectoire de la bille une fois qu'elle aura quitté le tremplin.

Si on néglige tout frottement, la vitesse atteinte au point C ne dépend que de la différence d'altitude entre le point de départ (A) et le point C. On note cette vitesse v_0.

Cette vitesse a une direction bien précise : la bille va quitter le tremplin tangentiellement, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{v}_0$ a pour direction celle de la tangente à la courbe du tremplin au point C :
cette direction est donc une conséquence de la géométrie du tremplin.

Ce vecteur $\vec{v}_0$ va être décomposé dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ suivant ses coordonnées

$$\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin(\alpha) \end{array} \right.$$



2.2 Modèles physiques

- système : la bille
- référentiel : référentiel terrestre considéré comme galiléen le temps de l'expérience
- bilan des forces : la seule force considérée est le poids de la bille (quand elle quitte le tremplin, il n'y a plus de réaction du sol)
- repère de date : à t=0, la bille est au point C à la vitesse v_0
- repère d'espace : le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$

D'après **la seconde loi de Newton**, la somme des forces est égale au produit de la masse par le vecteur accélération : **on a une relation vectorielle**.

Dans ce modèle, on néglige tout frottement : la seule force prise en compte est la gravité. Cela donne : $\vec{P} = m\vec{a}$

Ce qui donne dans la situation présente : $m\vec{g} = m\vec{a}$
On étudie cette relation vectorielle selon chaque coordonnée ; on note que l'accélération ne dépend que du temps (c'est une fonction du temps) et on obtient : $\vec{a}(t) \left| \begin{array}{l} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{array} \right.$

2.3 Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$

Il faut avoir en tête que **l'accélération est la dérivée (par rapport au temps) de la vitesse**.

Cela s'écrit : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$; cette relation vectorielle se traduit en terme de coordonnées par :

$$\left| \begin{array}{l} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} \end{array} \right.$$

Pour obtenir des renseignements sur la vitesse, il suffit d'utiliser ce qui a été dit en première partie :
- la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{i})$ de la vitesse est une fonction qui a une dérivée nulle : elle est constante ;
- même chose pour la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{j})$;
- la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{k})$ de la vitesse est une fonction qui a une dérivée constante : elle est affine.

On obtient : $\vec{v}(t) \left| \begin{array}{l} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = k_2 \\ v_z(t) = -gt + k_3 \end{array} \right.$

Pour déterminer les valeurs des constantes, on étudie ce qu'il se passe à l'instant initial, calé au moment où la bille est au point C : $\vec{v}(t=0) \left| \begin{array}{l} v_x(t=0) = k_1 = v_0\ \cos(\alpha) \\ v_y(t=0) = k_2 = 0 \\ v_z(t=0) = -g \times 0 + k_3 = v_0\ \sin(\alpha) \end{array} \right.$

Ainsi, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps : $\vec{v}(t) \left| \begin{array}{l} v_x(t) = v_0\ \cos(\alpha) \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0\ \sin(\alpha) \end{array} \right.$

2.4 Le vecteur position

On le note : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t)}$

Il faut avoir en tête que **la vitesse est la dérivée (par rapport au temps) de la position**.

Cela s'écrit : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$; cette relation vectorielle se traduit en terme de coordonnées par :

$$\left| \begin{array}{l} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{array} \right.$$

Pour obtenir des renseignements sur la position, il suffit de faire la même chose que précédemment :
- la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{i})$ de la position est une fonction qui a une dérivée constante : elle est affine ;
- la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{j})$ de la position est une fonction qui a une dérivée nulle : elle est constante ;
- la composante selon l'axe $(O\ ;\ \vec{k})$ de la position est une fonction qui a une dérivée affine : c'est un polynôme du second degré.

On obtient : $\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0\ \cos(\alpha)t + k_1 \\ y(t) = k_2 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\ \sin(\alpha)t + k_3 \end{array} \right.$

Pour déterminer les valeurs des constantes, il suffit de dire que la bille est au point C de coordonnées (15 ;0 ;5) à l'instant initial : $\overrightarrow{OM}(0) \left| \begin{array}{l} x(t=0) = v_0\ \cos(\alpha) \times 0 + k_1 = k_1 = 15 \\ y(t=0) = k_2 = 0 \\ z(t=0) = -\dfrac{1}{2}g \times 0^2 + v_0\ \sin(\alpha) \times 0 + k_3 = k_3 = 5 \end{array} \right.$

Ainsi, on obtient les coordonnées du vecteur position en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0\ \cos(\alpha)\, t + 15 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g t^2 + v_0\ \sin(\alpha)\, t + 5 \end{array} \right.$$

2.5 interprétation des résultats

On constate alors que **le mouvement est plan** (puisque la composante selon l'axe $(O\,;\ \vec{j})$ est nulle.

On peut exprimer z en fonction de x, et de cette façon, éliminer le temps dans ces équations :

$x(t) = v_0\ \cos(\alpha)\, t + 15$ donne $t = \dfrac{x(t) - 15}{v_0.\cos(\alpha)}$

Cela sera noté (un peu abusivement mais bon, ça va aller !) : $t = \dfrac{x - 15}{v_0.\cos(\alpha)}$

On remplace t par cette expression dans l'équation selon l'axe $(O\,;\ \vec{k})$:

$z(t) = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x-15}{v_0.\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\ \sin(\alpha)\left(\dfrac{x-15}{v_0.\cos(\alpha)}\right) + 5$

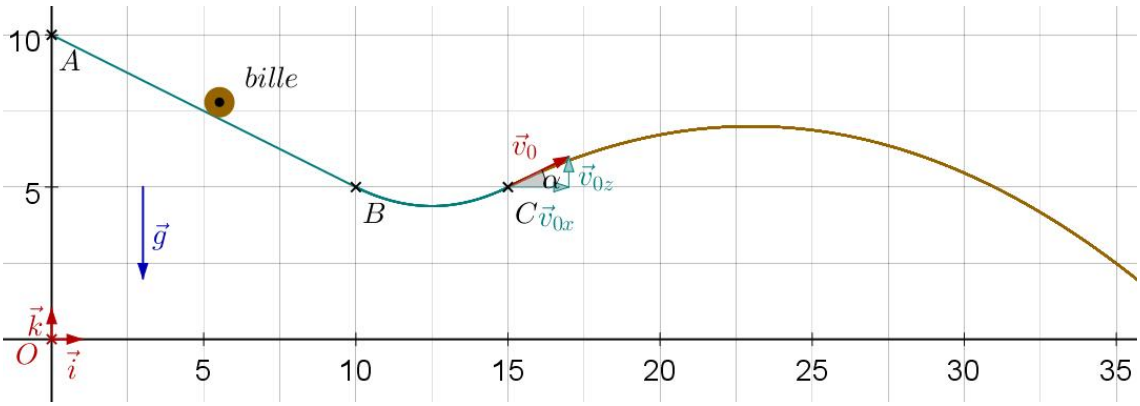
On remplace (là encore un peu abusivement), $z(t)$ par z, en voyant désormais z comme une fonction de la variable x :

$z(x) = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x-15}{v_0.\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\ \sin(\alpha)\left(\dfrac{x-15}{v_0.\cos(\alpha)}\right) + 5$

On fait évoluer cette écriture :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x-15}{v_0.\cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha)\Big(x - 15\Big) + 5$$

Cela met en évidence que la trajectoire de la bille est **une parabole**.



trajectoire pour une vitesse v_0 donnée