

exercice de synthèse : ex 72 p 351

$$1. \quad a. \quad v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}v_n$$

Cela montre que la suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{6}$

$$b. \quad \text{Pour déterminer } v_n, \text{ on doit connaître son premier terme : } v_1 = u_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \frac{1}{10} \frac{1}{6^{n-1}}$

$$\text{On en déduit : } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \frac{1}{6^{n-1}}$$$

$$2. \quad a. \quad a_1 \text{ est la probabilité d'utiliser le dé } A \text{ au premier lancer ; cette probabilité vaut } \frac{1}{2} : \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $a_1 = \frac{1}{2}$$$

$$b. \quad \text{D'après la formule des probabilités totales : } P(R_1) = P(A_1 \cap R_1) + P(\overline{A_1} \cap R_1)$$

$$\text{Cela donne : } r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{12} \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $r_1 = \frac{7}{12}$$$

$$c. \quad R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n}) \text{ est une relation sur les événements ; cela donne en terme de probabilités :}$$

$$r_n = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n}) ; \text{ on fait évoluer ces écritures en utilisant les probabilités conditionnelles :}$$

$$r_n = P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(R_n)$$

$$\text{D'où : } r_n = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n) \times \frac{2}{3}$$

$$\text{En faisant évoluer cette écriture, on obtient : } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$$

$$d. \quad A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

Comment obtenir le dé A au $n+1^{\text{ème}}$ lancer ? Deux cas de figure :

- on avait un dé A au lancer précédent (le $n^{\text{ème}}$) et on est tombé sur une face rouge ;
- on avait un dé B au lancer précédent et on est tombé sur une face blanche.

$$\text{Écrire cette situation en notations mathématiques donne : } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$$

Cette relation ne fait finalement que traduire la « règle du jeu ».

$$e. \quad \text{En passant aux probabilités dans la relation précédente, on obtient :}$$

$$P(A_{n+1}) = P(R_n \cap A_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}) \text{ (car les événements sont incompatibles)}$$

$$\text{D'où : } a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(\overline{R_n}) = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n) \times \frac{1}{3}$$

$$\text{En faisant évoluer cette écriture, on obtient : } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$$$

On constate que la suite (a_n) vérifie :

- le premier terme a_1 est égal à $\frac{1}{2}$;

– la relation de récurrence suivante : $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$.

La suite (a_n) est donc la suite décrite dans la partie 1 de l'exercice, et donc, pour tout entier

$$n \geq 1, \quad a_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \frac{1}{6^{n-1}}$$

f. ainsi, $r_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \frac{1}{6^{n-1}} \right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{10} \frac{1}{6^n} + \frac{3}{5}$; on a bien : $r_n - \frac{1}{10} \frac{1}{6^n} + \frac{3}{5}$

Comme $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on sait que $\lim \frac{1}{6^n} = 0$, et on conclut donc que : $\lim r_n = \frac{3}{5}$

Cela signifie qu'après « un grand nombre d'étapes », la probabilité d'avoir une face rouge à un lancer sera proche de $\frac{3}{5}$.