Exercice utilisant des résultats sur les suites et les fonctions

la constante d'Euler (γ)

On appelle « Série harmonique » la suite (H_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On admet que cette suite diverge vers $+\infty$.

1. **a.** Tracer dans un repère la courbe de la fonction ln.

   b. Calculer H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5 ; placer les points de coordonnées $(n\,;\,H_n)$ (pour $n = 1, 2, \ldots, 5$) dans le repère. Que constate-t-on ?

   On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = H_n - ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$

   Nous allons prouver que la suite (u_n) converge.

2. **a.** Démontrer que pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, on a : $ln(1+x) \leqslant x$

   b. Démontrer que pour tout $x \in]-\infty\,;\,+1[$, on a : $ln(1-x) \leqslant -x$

3. **a.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $ln(n+1) = ln(n) + ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

   c. En déduire que la suite (u_n) est positive.

4. **a.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n).

La limite de la suite (u_n), notée γ, s'appelle la constante d'Euler ($\gamma \approx 0,577$).