

Exercice 111 p 48 : Parcours Allegro

1) Tout d'abord, nous allons montrer $a = \sqrt{2}$ est solution de l'équation $(x-1)(x+1) = 1$

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1) \\&= x^2 - 1^2 \\&= x^2 - 1\end{aligned}$$

$$\text{ou } (x-1)(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

On peut calculer aussi :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \\&= 2 - 1 \\&= 1\end{aligned}$$

Ensuite, il faut aussi montrer que a est solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{1+x}$.

Pour $x \neq -1$

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$\sqrt{2}$ est bien solution de l'équation.

2) Pour $x \neq -1$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= f(Q_1)$$

Donc $Q_1 = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$Q_2 = f(Q_1)$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}}$$

$$= 1 + \frac{5}{12}$$

$$= \frac{12+5}{12}$$

$$= \frac{17}{12}$$

$$3) Q_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = f(Q_2)$$

$$4) Q_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}}$$

$$= 1 + \frac{12}{29}$$

$$= \boxed{\frac{41}{29}}$$

On a vu dans le parcours Moderato que $Q_4 = f(Q_3)$, donc :

$$\begin{aligned} Q_4 &= f(Q_3) \\ &= 1 + \frac{1}{1+Q_3} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{41}{29}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{70}{29}} \\ &= 1 + \frac{29}{70} \\ &= \frac{99}{70} \end{aligned}$$

$$5) \left| \sqrt{2} - Q_1 \right| \approx 0,0142135 \dots$$

$$\left| \sqrt{2} - Q_2 \right| \approx 0,0024531 \dots$$

$$\left| \sqrt{2} - Q_3 \right| \approx 0,000620458 \dots$$

$$\left| \sqrt{2} - Q_4 \right| \approx 0,0000721519 \dots$$

Plus on avance, plus on se rapproche de 0 - le nombre se rapproche donc de $\sqrt{2}$.