Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. **a.** Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.} \\ &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\ &= \frac{3}{4}(a_n - 1320) \\ &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n \end{aligned}$$

On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320$ donc $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n = b_n = \frac{2200}{2} = 1100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.

On procède par essais … pour constater que n est proche de 3 ; on essaie avec 3 pour conclure.