

2) Pour $(\vec{OA}, \vec{OB})$:

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{OB})$$

$$= (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{u}, \vec{OA})$$

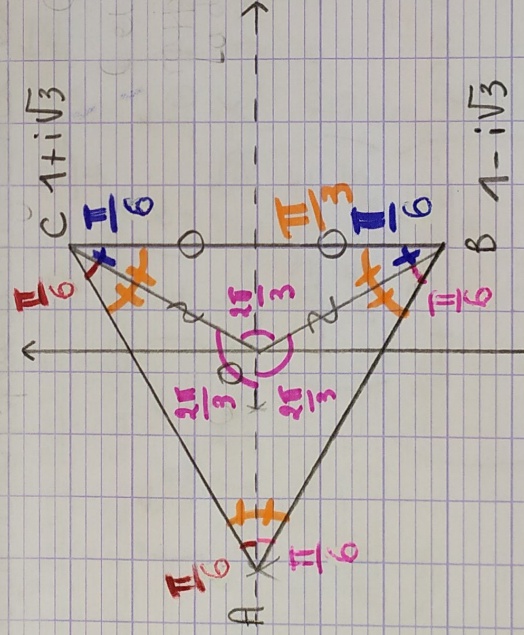
$$= \arg(z_B) - \arg(z_A) + 2k\pi$$

$$= \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{-2}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

(Chasles)

de la même manière, $(\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{OC}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{3}$
 ainsi $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OC}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{3}$



✖

Explications

 z_L

3)a) On veut déterminer l'abscisse du point L pour que AOOD soit un parallélogramme.

On sait que D est le milieu de $[OB]$, ainsi :

$$z_D = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Pour que AODL soit un parallélogramme, il faut que $\vec{AO} = \vec{LD}$ ou $\vec{z}_{AO} = \vec{z}_{DL}$

$$\vec{z}_{AO} = z_0 - z_A = 0 - (-2) = 2$$

$$\text{ainsi } \vec{z}_{DL} = z_0 - z_L = 2$$

$$\text{donc } \Leftrightarrow \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} - z_L = 2$$

$$\text{et donc } z_L = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_L = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

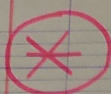
b) Pour que $\vec{OL}$ et $\vec{AL}$ soient orthogonaux, il faut que $(\vec{OL}, \vec{AL}) = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (\vec{OL}, \vec{AL}) &= (\vec{OL}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{AL}) \quad (\text{Chasles}) \\ &= (\vec{u}, \vec{AL}) - (\vec{u}, \vec{OL}) \\ &= \arg\left(\frac{z_L - z_A}{z_L - z_0}\right) \\ &= \arg\left(\frac{\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} + 2}{\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} + 0}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc $\vec{OL}$ et $\vec{AL}$ sont bien orthogonaux.

c) $[OA]$ est le diamètre du cercle de centre Π et l'hypoténuse du triangle OAL rectangle en L . OAL est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[OA]$, ainsi les sommets O, A, L appartiennent au cercle de centre Π .

Explications Q2 :



on peut remarquer que les points C et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit que les droites CO et BO sont de même longueur

(on peut faire un calcul de module pour vérifier :)

$$z_C = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

&

$$z_B = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

Ainsi puisque le triangle OCB est isocèle, les angles $\widehat{OCB}$ et $\widehat{CBO}$ sont égaux

$$\text{On sait que } \widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

on en déduit pour les angles restants :

$$(180 - 120 = 60^\circ), \text{ ils se partagent de manière égale donc } \widehat{OCB} = \widehat{CBO} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

on utilise le même raisonnement pour les triangles AOC et AOB.

$$\text{Pour AOC : } \widehat{ACO} = \widehat{OAC} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Pour AOB : } \widehat{OAB} = \widehat{ABO} = \frac{\pi}{6}$$

On peut donc en déduire la valeur des angles du triangle ABC :

$$\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

or un triangle dont les 3 angles valent 60° est un triangle équilatéral.

ABC est donc équilatéral.

On a donc démontré que ABC est équilatéral.