Durée : 2 h

calculatrice autorisée - pas d'échange de calculatrice ou de matériel Corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

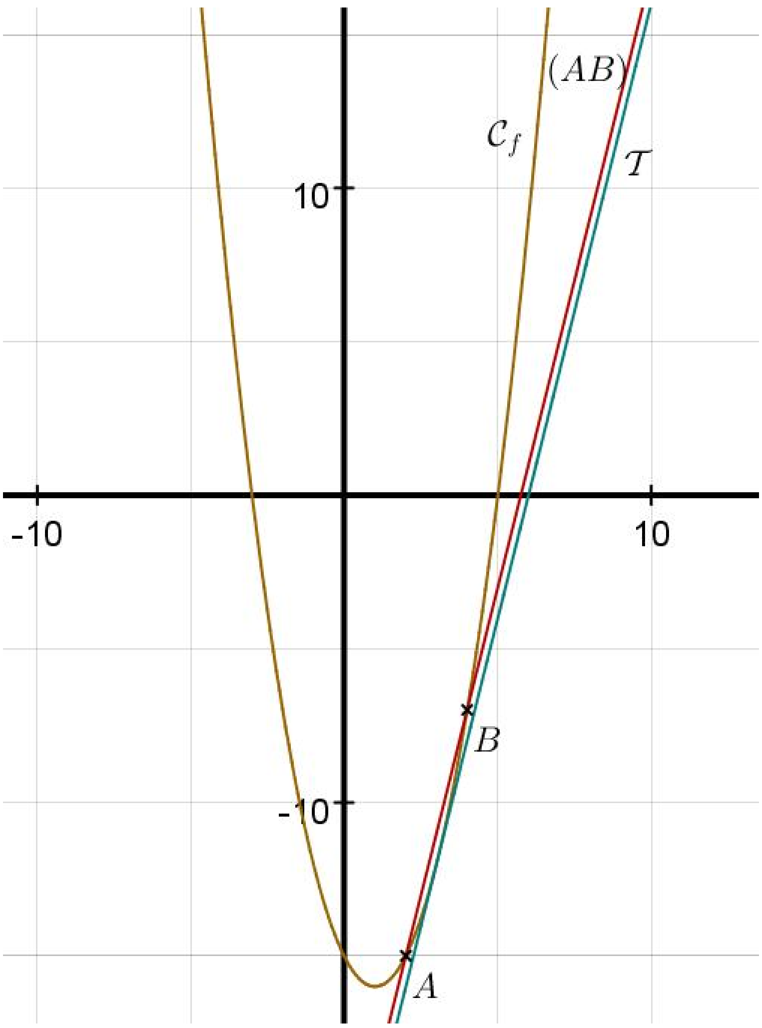
Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

***Exercice* 1** */6 points*

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 15$

1. Tracez la représentation graphique de cette fonction dans un repère, pour des valeurs de x variant entre 0 et 5 (on prendra comme échelle 2 cm pour une unité pour l'axe des abscisses, ainsi que pour l'axe des ordonnées). On note $\mathcal{C}_f$ cette courbe.



2. Calculez la dérivée de la fonction f.

$$\boxed{f'(x) = 2x - 2}$$

3. Construisez le tableau de variation de la fonction f en étudiant le signe de f'.

En connaissant le signe de la dérivée, on pourra donner les variations de la fonction :

$f'(x) < 0$ donne $2x - 2 < 0$, ce qui revient à $x < 1$

De même, $f'(x) > 0$ revient à $x > 1$

La dérivée s'annule en 1.

On peut construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

4. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 ; on note $\mathcal{T}$ cette tangente. Construisez la tangente $\mathcal{T}$ dans le repère précédent

Équation de la tangente en 3 : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

$f'(3) = 2 \times 3 - 2 = 4$ et $f(3) = 3^2 - 2 \times 3 - 15 = 9 - 6 - 15 = -12$

Ainsi, $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 4(x - 3) - 12$ ce qui donne $y = 4x - 24$

5. A est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui a pour abscisse 2 ; B est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

$A(2; f(2))$ ce qui donne $A(2; -15)$
$B(4; f(4))$ ce qui donne $B(4; -7)$

6. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

L'équation de la droite (AB) est de la forme : $y = ax + b$

Le fait que les points A et B soient sur cette droite donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} -15 = a \times 2 + b \\ -7 = a \times 4 + b \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient : $-15 - (-7) = 2a - 4a$ ce qui donne $-8 = -2a$ et finalement $a = 4$

En remplaçant a par 4 dans la première équation, on obtient : $-15 = 4 \times 2 + b$, soit $-15 = 8 + b$ et donc $b = -23$

La droite (AB) a pour équation $y = 4x - 23$

7. Justifiez que la droite (AB) et la tangente $\mathcal{T}$ sont parallèles.

$\mathcal{T}$ et (AB) ont le même coefficient directeur (égal à 4) : elles sont parallèles.

Exercice 2 *$/4$ points*

On modélise le coût de production d'un objet par la fonction suivante :
$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 7x^2 + 45x + 18$, où x représente le nombre d'objets produits (en milliers).
L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'objet à fabriquer qui minimisera le coût de fabrication.

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f.

$f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - 7 \times 2x + 45 = x^2 - 14x + 45$

2. Montrer que f' peut se mettre sous la forme : $f'(x) = (x-5)(x-9)$

$f'(x) = (x-5)(x-9) = x^2 - 9x - 5x + 45 = x^2 - 14x + 45$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f en étudiant le signe de f'.

x	$-\infty$		5		9		$+\infty$
signe de $x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$\approx 109,7$	$\searrow$	99	$\nearrow$	

4. Le dirigeant de l'entreprise a pour objectif de produire 10 000 objets : quel conseil pouvez-vous lui donner ?

On observe un minimum local de la fonction pour $x = 9$, c'est-à-dire une production de 9 000 objets. Il est donc plus intéressant de se donner comme objectif pour le moment une production de 9 000 objets, cela minimisera le coût de production.

Exercice 3 *$/4$ points*

Dans un QCM (Questionnaire à Choix Multiple), chaque question comporte quatre propositions de réponse, dont une seule est correcte. Ce questionnaire comporte 20 questions.

Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse enlève un demi-point. Un élève répond au hasard à toutes les questions.

1. En notant X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses, expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

Chaque réponse est une expérience aléatoire avec une probabilité de réussite égale à $\dfrac{1}{4} = 0,25$; ces expériences se répètent de manière indépendante (la réponse d'une question n'influe pas sur une autre) : X suit donc une loi binomiale de paramètres $p = 0,25$ et $n = 20$ puisqu'il y a 20 répétitions.

2. Calculer la probabilité que l'élève ait répondu juste à 5 questions (on note cette probabilité $P(X = 5)$).

On applique la formule du cours : $P(X=5) = \binom{20}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-5} \approx 0,20$

3. Calculer la probabilité que l'élève ait plus de 2 réponses justes.

On cherche : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)$

On calcule $P(X=0) \approx 0,003$ et $P(X=1) \approx 0,021$

Au final : $P(X \geqslant 2) \approx 0,976$

4. Combien lui faut-il de réponses justes pour avoir un total de 8 points ?

Il aura marqué 12 points pour 12 bonnes réponses et perdu $0,5 \times 8 = 4$ points pour 8 mauvaises réponses, ce qui donne un total de 8 points.

Exercice 4 * /2 points*

On place 2800 € sur un compte épargne à 3 % annuel (cela signifie que la somme placée augmente de 3 % chaque année). Quelle somme y aura-t-il sur le compte épargne dans 15 ans si le taux d'intérêt reste le même et si aucun versement ni retrait n'est fait sur le compte pendant toute cette période ?

Une hausse de 3 % se traduit par un coefficient multiplicatif de 1,03.

15 hausses successives donnent un coefficient multiplicatif de $1,03^{15} \approx 1,558$

On aura au final $2800 \times 1,03^{15} \approx 4362,31$ €.

Exercice 5 * /4 points*

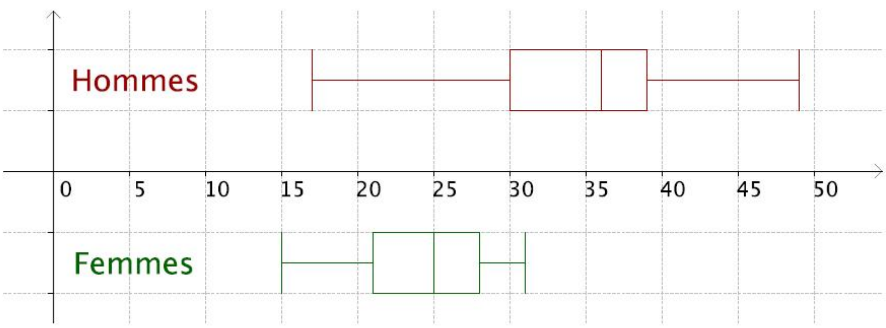
1. Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série pour les hommes.

   $Q_1 = 30$, $Me = 36$ et $Q_3 = 39$

2. Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série pour les femmes.

   $Q_1 = 21$, $Me = 25$ et $Q_3 = 28$

3. Dessiner les diagrammes en boîte de ces deux séries l'un en dessous de l'autre en utilisant la même graduation.



4. Calculer la moyenne (notée $\overline{x}$) et l'écart-type (noté σ) pour les deux séries.

   pour les hommes : $\bar{x} \approx 35,1$ et $\sigma \approx 7,3$

   pour les femmes : $\bar{x} \approx 24,3$ et $\sigma \approx 4,6$

5. Quelle est la proportion de pays se trouvant dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma \ ; \ \overline{x} + \sigma]$ pour la série « homme » ? Même question pour la série « femme ».

   pour les hommes : $[\overline{x} - \sigma \ ; \ \overline{x} + \sigma] \approx [27,8 \ ; \ 42,4]$: 12 des 15 pays font partie de cet intervalle, soit 80 %.

   pour les femmes : $[\overline{x} - \sigma \ ; \ \overline{x} + \sigma] \approx [19,7 \ ; \ 28,9]$: 11 des 15 pays font partie de cet intervalle, soit environ 73 %.

6. Comparer les deux séries.

   Dans pratiquement les trois quarts des pays de l'UE, il y a plus d'hommes qui fument que dans le pays dans lequel le pourcentage de femmes qui fument est le plus élevé.

   Les statistiques concernant les femmes sont plus régulières que celles concernant les hommes : l'étendue de la série est égale à 16, contre 32 pour la série des hommes.

   L'intervalle interquartile est en revanche sensiblement de la même amplitude pour les hommes et pour les femmes : [21 ; 28] (amplitude 7) pour les femmes, contre [30 ; 39], amplitude 9 pour les hommes.

   Les valeurs minimales sont presque les mêmes pour les deux séries (17 pour les hommes et 15 pour les femmes), même si elles ne sont pas atteintes pour les mêmes pays (respectivement Suède et Portugal). En revanche, il y a une disparité beaucoup plus grande entre hommes et femmes lorsqu'on considère les valeurs maximales : 49 pour les hommes contre 31 pour les femmes.