**Durée : 3 h**
**calculatrice autorisée - pas d'échange de calculatrice ou de matériel**

# Proposition de corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Des réponses peuvent être complétées sur cette feuille. Vous rendrez cette feuille (n'oubliez pas d'**inscrire votre nom**) accompagnée de votre copie.

Le QCM sera rendu à part (n'oubliez pas d'y inscrire votre nom).
Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

## ***Exercice* 1** *(/3 points)*

Lorenzo et Natacha font un concours de fléchettes. Chacun lance 40 fléchettes.

Résultats de Lorenzo :

| points par fléchette | 0 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| nombre de fléchettes | 11 | 9 | 1 | 8 | 11 |

Résultats de Natacha :

| points par fléchette | 0 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| nombre de fléchettes | 4 | 6 | 22 | 5 | 3 |

1) Déterminer la moyenne de chaque joueur. Quel est le meilleur joueur ?

Pour Lorenzo :
$$Moy = \frac{0\times 11 + 10\times 9 + 20\times 1 + 50\times 8 + 100\times 11}{40} = \frac{1610}{40} = 40,25$$
Lorenzo a une moyenne de 40,25 points par lancer.

Pour Natacha :
$$Moy = \frac{0\times 4 + 10\times 6 + 20\times 22 + 50\times 5 + 100\times 3}{40} = \frac{1050}{40} = 26,25$$
Natacha a une moyenne de 26,25 points par lancer.

D'après ces résultats, on peut considérer a été le meilleur sur cette série de 40 lancers.

2) Déterminer la médiane, les premier et troisième quartiles de chaque série de résultats. Quel est le joueur le plus régulier ?

Pour Lorenzo :
**médiane** : l'effectif total est 40 ; pour connaître la valeur médiane, on cherche le nombre de points marqués par la $20^{eme}$ fléchette.
Cette $20^{eme}$ fléchette a marqué 10 points.
**premier et troisième quartiles** : l'effectif, partagé en 4 est égal à 10.
La dixième fléchette a marqué 0 points. La trentième fléchette a marqué 100 points.
Pour la série de Lorenzo, la valeur médiane est 20, le premier quartile est 0 et le troisième quartile est 100.

Pour Natacha :
La $20^{eme}$ fléchette a marqué 20 points.
La dixième fléchette a marqué 10 points. La trentième fléchette a marqué 20 points.
Pour la série de Natacha, la valeur médiane est 20, le premier quartile est 10 et le troisième quartile est 20.

D'après ces résultats, on peut calculer l'écart interquartile, c'est-à-dire la différence entre le troisième et le premier quartile pour constater que les résultats de Lorenzo sont beaucoup hétérogènes que ceux de Natacha.

***Exercice* 2** *\/3 points*

Voici un extrait du rapport mondial sur le développement humain 2007/2008 du PNUD [1] :

« Par exemple, la prise de conscience du réchauffement climatique s'appuie sur les travaux du GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) qui élabore des projections à partir des tendances passées. Certaines de ces évolutions sont calculées en pourcentage ; on observe ainsi qu'**une hausse des émissions mondiales de $CO_2$ de 2 % en moyenne par an a entraîné leur doublement ces 35 dernières années** ? »

1. A quelle hausse (exprimée en pourcentage) correspondent 35 hausses successives de 2% ?

   $k = 1 + \frac{2}{100} = 1,02$ : le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2% est 1,02.
   $k_{35 \text{ hausses}} = \underbrace{1,02 \times 1,02 \times \ldots \times 1,02}_{35 fois} = 1,02^{35} \approx 1,99989 \approx 2$

2. La fin du texte (partie en gras) est-elle exacte ?

   Cette phrase est bien exacte : 35 hausses successives de 2% reviennent à doubler la quantité initiale ; le calcul précédent le montre.

3. Proposer, sur une période de 10 ans, des baisses (exprimées en pourcentages) pour revenir à la situation initiale, c'est-à-dire un niveau de pollution équivalent à ce qu'il y avait il y a 35 ans.

1. Programme des Nations Unies pour le Développement

Il faut compenser un doublement, c'est-à-dire une hausse de 100 %. Cette hausse se traduit par un coefficient multiplicateur égal à 2. Pour revenir au point de départ, il faut multiplier les quantités pas 0,5, ce qui traduit une baisse de 50 %.

Reste à proposer dix baisses successives qui reviennent au global à une baisse de 50 %. On peut prendre par exemple dix baisses du même pourcentage.

On note $k$ le coefficient associé à cette baisse : on doit avoir :$k^{10} = 0,5$ ; après essais, on trouve : $k \approx 0,933$, ce qui traduit une baisse d'environ 6,7 %.

Ainsi, si le niveau de pollution baisse de 6,7 % pendant 10 ans, on aura retrouvé les niveaux de pollution d'il y a 35 ans.

***Exercice 3*** * /2 points*

Lors du premier tour des élections présidentielles de 2012, le candidat F. Hollande a obtenu 28,63% des suffrages exprimés.
Voici les résultats collectés à Seyssins (ville située à proximité de Grenoble) dans un journal (*ils sont recopiés à côté pour plus de lisibilité*) :


| candidat | nombre de voix | pourcentage |
|---|---|---|
| Hollande | 1 446 | 31,31% |
| Sarkozy | 1 317 | 28,52% |
| Le Pen | 654 | 14,16% |
| Bayrou | 482 | 10,44% |
| Mélenchon | 435 | 9,42% |
| Joly | 145 | 3,14% |
| Dupont-Aignan | 80 | 1,73% |
| Poutou | 36 | 0,78% |
| Artaud | 14 | 0,30% |
| Cheminade | 9 | 0,19% |

On se demande si les résultats de cette ville sont représentatifs des résultats nationaux par rapport au candidat F. Hollande.

1. Retrouvez par un calcul le fait que F. Hollande a obtenu 31,31% des voix à Seyssins.

Le total des suffrages exprimés s'obtient en additionnant toutes les voix, ce qui donne 4618.

Le candidat Hollande a obtenu 1446 sur 4618, ce qui donne :
$\frac{1446}{4618} \approx 0,3131 \approx 31,31\%$.

2. Est-ce « normal » que ce pourcentage ne soit pas exactement le même qu'au niveau national ?

3. Quel est l'intervalle de fluctuation du pourcentage de voix obtenu par le candidat Hollande sur un échantillon de taille $n = 4618$ ? (On pensera à utiliser la formule $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ en précisant la valeur de $p$, ainsi que les raisons qui permettent d'utiliser cette formule).

Oui, les résultats « fluctuent » selon les personnes qui répondent.

4. Quelle est votre conclusion : la ville de Seyssins est-elle « conforme » à la population française par rapport au vote de F. Hollande ?

$p = 28,63\% = 0,2863$ ; $p$ est la probabilité du modèle ; le modèle est le résultat du pays tout entier. En théorie, quand on prend un échantillon d'électeurs français, on devrait avoir 28,63% de cet échantillon qui a voté pour le candidat Hollande.

On peut utiliser cette formule car l'échantillon est assez grand (4618 est supérieur à 30 !) et la probabilité est bien comprise entre 0,2 et 0,8.

Les calculs donnent pour cet intervalle de fluctuation :
$[0,2863 - \frac{1}{\sqrt{4618}}; 0,2863 + \frac{1}{\sqrt{4618}}] = [0,2716; 0,3010]$

Si on écrit les valeurs en pourcentage, cela donne : $[27,16\%; 30,10\%]$.

***Exercice 4*** *⁄3 points*

Au grand jeu « Radioplus », l'animateur téléphone à des personnes au hasard pour leur demander le montant de la cagnotte Radioplus. Si la personne donne la bonne réponse, elle remporte la cagnotte.

Dans la population, seuls les auditeurs de Radioplus connaissent le montant de la cagnotte ; ils représentent 15% de la population.

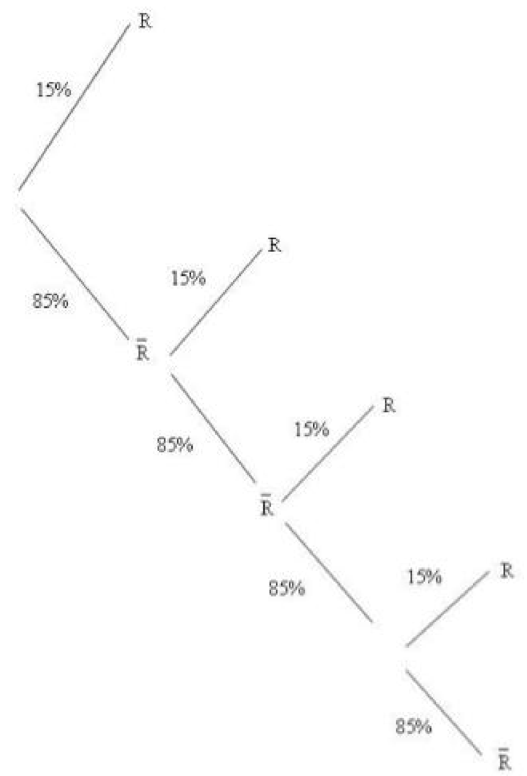
Si la personne appelée donne la bonne réponse, le jeu est arrêté, sinon l'animateur appelle une autre personne.

Il appelle au maximum quatre personnes. Vu la taille de la population, on considère que tous les appels suivent la même probabilité et sont indépendants les uns des autres.

1. Modélisez avec un arbre de probabilités les issues du jeu Radioplus.

On note « $R$ » le fait que l'auditeur réponde correctement et gagne la cagnotte, et « $\bar{R}$ » l'évènement contraire, à savoir que l'auditeur ne connaît pas la réponse.

La situation de l'énoncé peut se traduire par l'arbre pondéré ci-dessous :




2. Déterminez la probabilité que personne ne remporte la cagnotte Radioplus.

En utilisant l'arbre pondéré, on trouve : $P(\text{aucun vainqueur}) = 0,85^4 \approx 0,522$

La probabilité que personne ne remporte la cagnotte est environ égale à 52,2%.

On appelle $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes appelées.

3. (a) Déterminez la loi de probabilité de $X$.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = a_i)$ | 0,15 | 0,1275 | 0,108 | 0,614 |

remarque : la probabilité que $X = 4$ s'obtient dans deux cas :
* 4 appels qui n'aboutissent pas, à une probabilité de $0,85^4 \approx 52,2\%$
* 3 appels qui n'aboutissent pas et un vainqueur au quatrième appel, à une probabilité de $0,85^3 \times 0,15 \approx 9,2\%$.
* la probabilité que $X = 4$ s'obtient en additionnant les deux résultats précédents.

(b) Calculez l'espérance $E(X)$ de cette variable et interprétez le résultat.

$E(X) = 1 \times 0,15 + 2 \times 0,1275 + 3 \times 0,108 + 4 \times 0,614 \approx 3,19$

Cette valeur est le nombre « moyen » d'appels passés.

***Exercice* 5** * /6 points*

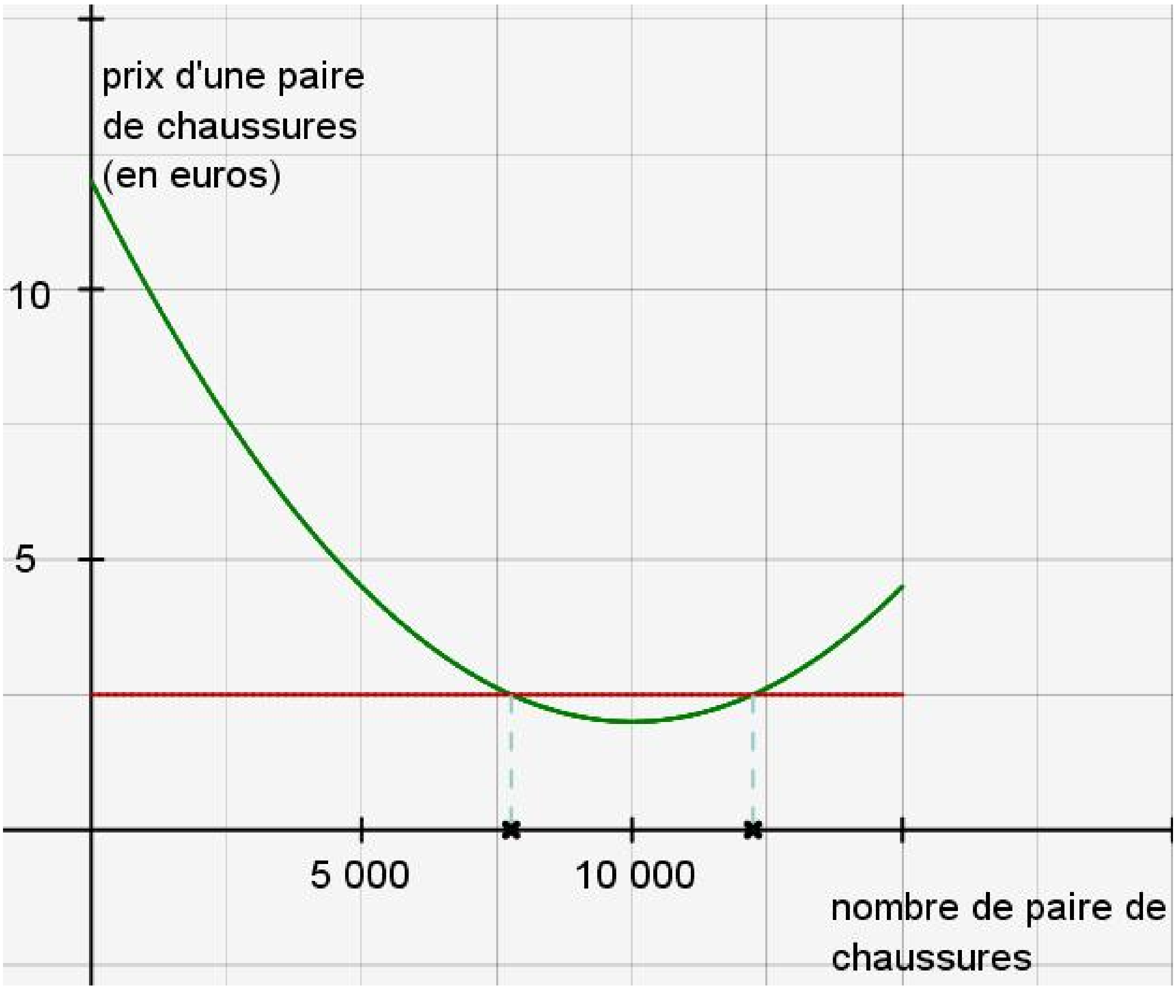
QCM : **rendre la feuille réponse en ayant inscrit son nom**.

**Bien colorer les cases en noir**.

***Exercice* 6** *\/3 points*

Dans cet exercice, on utilise une fonction pour décrire un « phénomène » économique, à savoir l'évolution du prix de revient d'un produit en fonction de la quantité produite.

Le graphique ci-dessous représente le prix de revient d'une paire de chaussures en fonction du nombre de paires de chaussures fabriquées.




*un carreau représente 2 500 paires de chaussures en abscisse ; un carreau représente 2,50 euros en ordonnée*

1. Expliquer pourquoi, dans un premier temps, le prix de revient d'une paire de chaussure diminue si on fabrique plus de paires de chaussures.

   Ce sont des « économies d'échelles » : en augmentant la production, on diminue la part des coûts fixes par produit fabriqué (location du bâtiment, chauffage, administratif etc.)

2. Donner les éléments qui peuvent faire augmenter ce prix de revient.

   Au bout d'un moment, pour augmenter la production, il va falloir embaucher du personnel, acheter de nouvelles machines, construire de nouveaux bâtiments … ce qui augmente le coût par produit.

3. Déterminer graphiquement le nombre de paires de chaussures à fabriquer pour que le prix de revient d'une paire de chaussures soit inférieur à 2,50 euros.(On veut voir apparaître des traits de construction sur le graphique).

   Entre environ 7 500 et environ 12 300 paires de chaussures produites.

4. La fonction représentée dans le graphique précédent a pour expression

$$f\ :\ x \mapsto 0,0000001x^2 - 0,002x + 12$$

(ce qui se note $f(x) = 10^{-7}x^2 - 2.10^{-3}x + 12$).
Retrouver par le calcul le résultat trouvé à la question précédente.

On doit résoudre $10^{-7}x^2 - 2.10^{-3}x + 12 \geqslant 2,5$ ce qui donne :
$10^{-7}x^2 - 2.10^{-3}x + 9,5 \geqslant 0$

On calcule le discriminant du polynôme du second degré $10^{-7}x^2 - 2.10^{-3}x + 9,5$

$\Delta = (-2.10^{-3})^2 - 4 \times 9,5 \times 10^{-7} > 0$ : il y a deux solutions

$x_1 = \dfrac{2.10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2.10^{-7}} \approx 7764$

$x_2 = \dfrac{2.10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2.10^{-7}} \approx 12236$

On a des valeurs cohérentes avec celles lues graphiquement, mais plus précises : on aura un coût de revient par paire de chaussures inférieur à 2,50 euros avec une production comprise entre 7764 et 12236 paires de chaussures.