Proposition de corrigé

Certaines questions peuvent être complétées sur le sujet. Inscrivez votre nom et rendez ce sujet avec votre copie.

***Exercice* 1** : / 4 points

On définit la fonction f pour tout nombre réel par $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Montrer que pour tout nombre réel, $f(x) = (2x - 13)(2x - 7)$

   $(2x - 13)(2x - 7) = 2x \times 2x + 2x \times (-7) - 13 \times 2x - 13 \times (-7)$
   $= 4x^2 - 14x - 26x + 91 = 4x^2 - 40x + 91$

2. Dans chaque situation, choisir la forme la plus appropriée et répondre à la question posée :

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

   $f(x) = 0 \iff (2x - 13)(2x - 7) = 0$
   $\iff 2x - 13 = 0$ ou $2x - 7 = 0$
   $\iff x = \dfrac{13}{2}$ ou $x = \dfrac{7}{2}$
   Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions : $\mathcal{S}\left\{\dfrac{13}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2}\right\}$

   (b) Calculer $f(0)$

   $f(0) = 4 \times 0^2 - 40 \times 0 + 91 = 91$

   (c) Déterminer l'image de $\dfrac{1}{2}$

   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(2 \times \dfrac{1}{2} - 13\right)\left(2 \times \dfrac{1}{2} - 7\right) = (1 - 13)(1 - 7) = (-12)(-6) = 72$

   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 91$

   $f(x) = 91 \iff 4x^2 - 40x + 91 = 0 \iff 4x^2 - 40x = 0 \iff x(4x - 40) = 0$
   $\iff x = 0$ ou $4x - 40 = 0$
   $\iff x = 0$ ou $4x = 40$
   $\iff x = 0$ ou $x = 10$
   Conclusion : l'équation $f(x) = 91$ a pour solutions : $\mathcal{S}\{0\ ;\ 10\}$

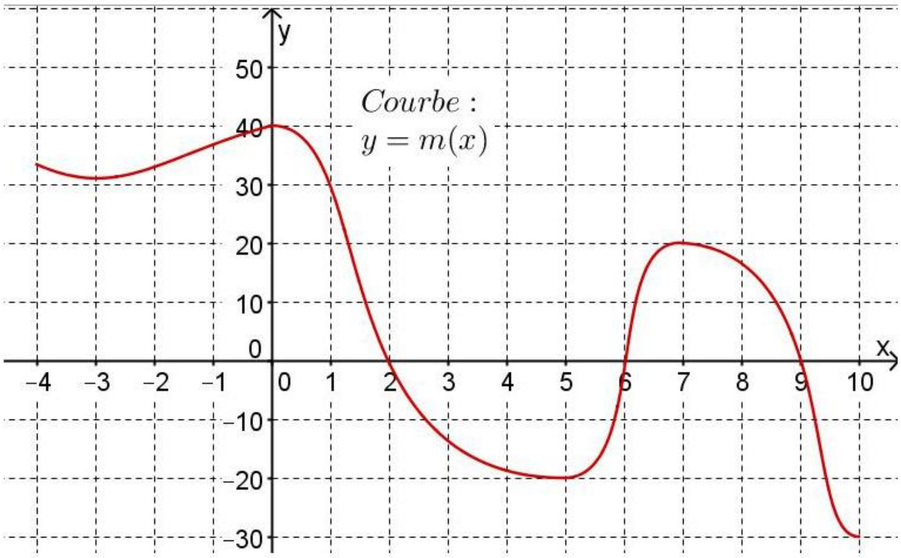
   (e) Résoudre l'équation $f(x) = 7$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$; on pourra s'aider d'un graphique.

   En utilisant la calculatrice (avec une fenêtre bien adaptée), on peut conjecturer que 3 et 7 sont solutions.

   On calcule alors les images de 3 et de 7 par f :
   $f(3) = 4 \times 3^2 - 40 \times 3 + 91 = 36 - 120 + 91 = 7$
   $f(7) = 4 \times 7^2 - 40 \times 7 + 91 = 196 - 280 + 91 = 7$
   Conclusion : l'équation $f(x) = 7$ a pour solutions : $\mathcal{S}\{3\ ;\ 7\}$

***Exercice* 2** : / 4 points

Dans le repère ci-dessous est tracée la courbe représentative d'une fonction m.



Toutes les réponses seront données avec la précision que permet la lecture graphique.

1. Donner l'image de 5 $f(5) = -20$
2. Combien 15 a-t-il d'antécédents ? 15 a trois antécédents.
3. Donner $m(0)$ $m(0) = 40$
4. Résoudre l'équation $m(x) = 0$ $\mathcal{S}\{2\ ;\ 6\ ;\ 9\}$
5. Résoudre $m(x) = 45$ Il n'y a pas de solution.
6. Quel est l'ensemble de définition de m ? $D_m = [-4\ ;\ 10]$ (ou $]-4\ ;\ 10[$)
7. Résoudre l'inéquation $m(x) > 30$ $\mathcal{S} = [-4\ ;\ 1[$ (ou $]-4\ ;\ 1[$)
8. Le repère est-il orthonormé ? Non, il est juste orthogonal.

***Exercice* 3** : / 2 points

On vous rappelle la formule donnant le volume d'un cube d'arête a : $\mathcal{V} = a^3$

Pierre affirme que si on double la longueur de l'arête du cube, le volume de ce cube est doublé : montrez que Pierre se trompe.

Par combien faut-il multiplier l'arête du cube pour que le volume soit effectivement doublé ? (*toute trace de recherche pertinente sera valorisée)*

Prenons un cube de 5 cm d'arête ; son volume est égal à $5^3 = 125$ cm^3.
Si on double la longueur de l'arête, on obtient un cube dont le volume sera $10^3 = 1000$ cm^3 : 1000 n'est pas le double de 125 ; Pierre se trompe.

Dans le cas général, on veut passer d'un cube d'un volume égal à a^3 à un cube d'un volume égal à $2a^3$, en multipliant a par un certain coefficient (que l'on note k).
On multiplie a par k ; le nouveau cube aura pour volume $(ka)^3 = k^3a^3$ et on obtient l'égalité : $k^3a^3 = 2a^3$ ce qui donne $k^3 = 2$

Après plusieurs essais, on peut obtenir une valeur approchée de k :
- pour $k = 2$, $k^3 = 8$: trop grand ;
- pour $k = 1,1$, $k^3 = 1,331$: trop petit ;
- pour $k = 1,3$, $k^3 \approx 2,2$: trop grand ;
- pour $k = 1,25$, $k^3 \approx 1,95$: trop petit ;
- pour $k = 1,26$, $k^3 \approx 2,00$: presque ça !

On peut considérer que le coefficient multiplicateur recherché est très proche de 1,26.

***Exercice* 4** : / 4 points

Les clients d'un coach sportif effectuent chaque année un test de fitness qui mesure le temps nécessaire pour revenir à un nombre normal de pulsations cardiaques après un effort.

Groupe 2012 : 12 personnes dont voici les temps :
58 s - 84 s - 27 s - 48 s - 136 s - 82 s - 42 s - 55 s - 50 s - 105 s - 52 s - 64 s

Groupe 2013 : le groupe avait un écart interquartile de 22 secondes et une médiane de 68 s.

Groupe 2014 :

Temps de récupération (en secondes)	**Effectif**
[0 ;20[	3
[20 ; 40[	12
[40 ; 60[	20
[60 ; 80[	14
[80 ; 100[	8
[100 ; 120[	14
[120 ; 140[	9
[140 ; 160[	0

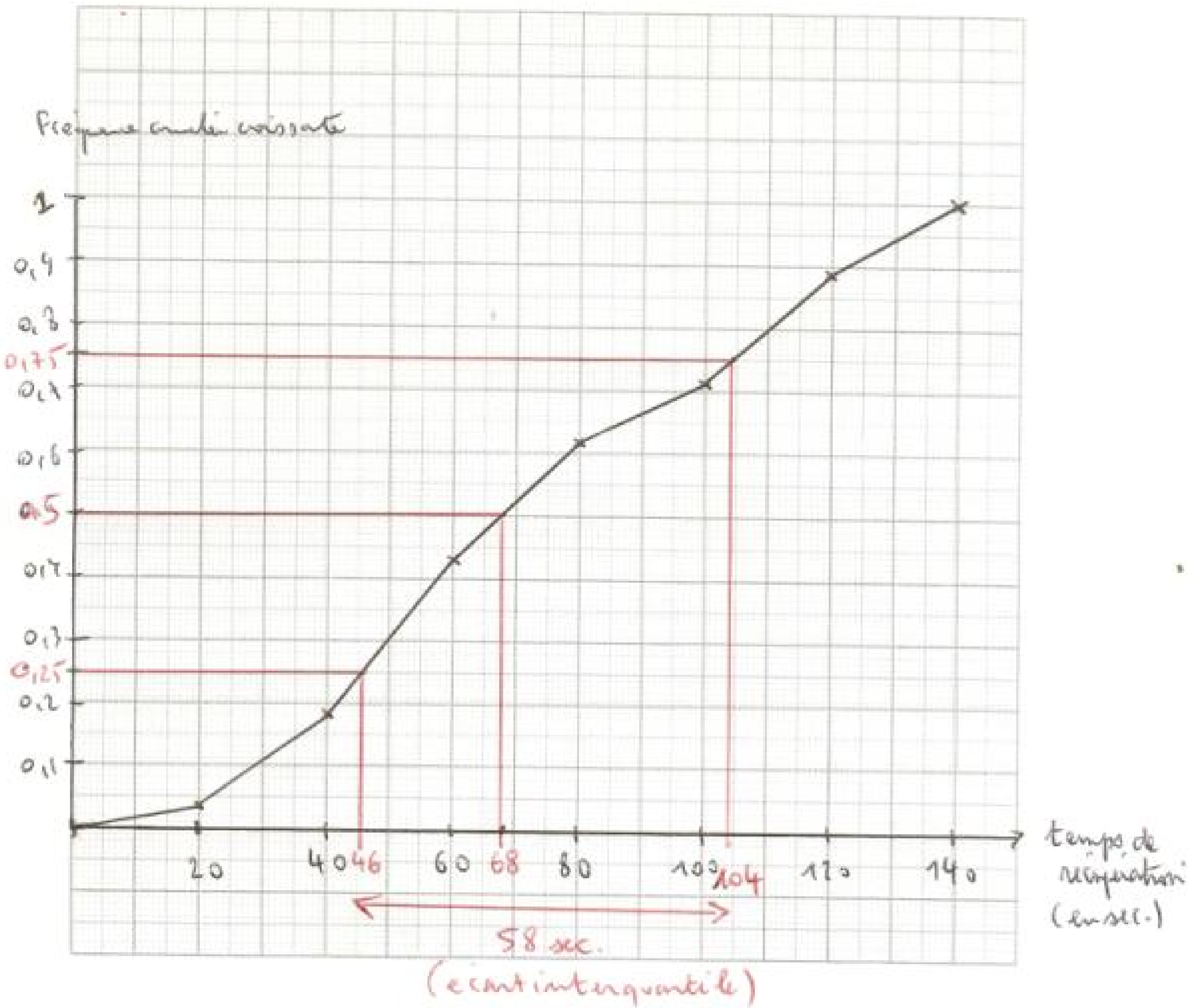
1. Pour le groupe de 2012 : reporter sur votre copie les caractéristiques statistiques calculées par votre calculatrice.

   On a une moyenne d'environ 66,9 s ; un premier quartile à 49, une médiane à 56,5 et un troisième quartile à 83.

2. Pour le groupe 2014, compléter le tableau suivant :

Temps de récupération (en secondes)	[0 ;20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 140[
Fréquence	0,0375	0,15	0,25	0,175	0,1	0,175	0,1125
Fréq cumulée croissante	0,0375	0,1875	0,4375	0,6125	0,7125	0,8875	1

3. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes pour le groupe de cette année sur la feuille de papier millimétré ci-contre.
   On prendra 1 cm pour 10 s et 1 cm pour 10%=0,1 (pour les fréquences cumulées).



4. Comparer les trois groupes *(deux ou trois phrases peuvent suffire si votre méthode d'analyse est bonne)*.

   Pour le groupe 1 : mediane=56,5 et écart interquartile=34.

   Pour le groupe 2 : mediane=68 et écart interquartile=22.

   Pour le groupe 3 : mediane=68 et écart interquartile=58.

Le groupe le plus « performant » en terme de récupération est le premier (la moitié des participants ont un temps de récupération inférieur à 56,5 s) ; le plus homogène est le groupe 2 (la moitié des participants se tiennent dans un intervalle de 22 s).

***Exercice* 5** : / 2 points

On vous propose les deux algorithmes suivants :

Saisir A
$A \leftarrow (A+4)A$
$A \leftarrow A+4$
Afficher A

Saisir B
$B \leftarrow B^2+4B+4$
Afficher B

Montrer que ces deux algorithmes ont le même effet sur les nombres placés en entrée.

Si on prend un exemple numérique avec 5.

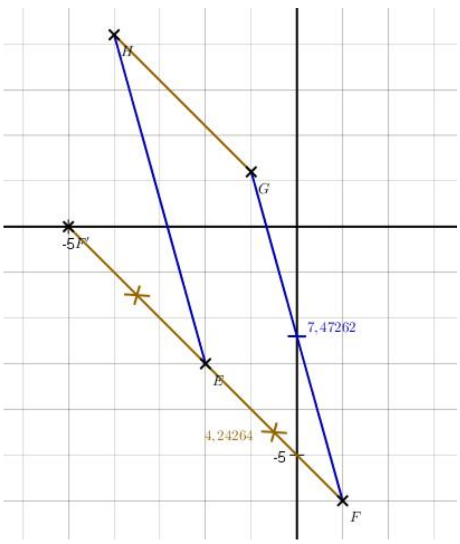
Pour l'algorithme 1 : A prend la valeur 5 ; puis A prend la valeur $(5+4)5 = 45$; enfin A prend la valeur $45+4 = 49$
Pour l'algorithme 2 : B prend la valeur 5 ; puis B prend la valeur $5^2+4\times5+4 = 25+20+4 = 49$
En sortie, ces deux algorithmes affichent 49.

Faisons la même chose dans le cas général, en entrant x dans chaque algorithme :

Pour l'algorithme 1 : A prend la valeur x ; puis A prend la valeur $(x+4)x$; enfin A prend la valeur $(x+4)x+4 = x^2+4x+4$
Pour l'algorithme 2 : B prend la valeur x ; puis B prend la valeur x^2+4x+4
En sortie, ces deux algorithmes affichent x^2+4x+4 : ils ont bien le même effet.

***Exercice* 6** : / 4 points

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-2\ ; -3)$, $F(1\ ; -6)$ et G (-1 ; 1,2)
On peut construire une figure pour illustrer, que l'on complète au fur et à mesure des questions :



1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$

   $\overrightarrow{EF}(1-(-2)\ ;\ -6-(-3))$ donc $\overrightarrow{EF}(3\ ;\ -3)$
   $\overrightarrow{EG}(-1-(-2)\ ;\ 1,2-(-3))$ donc $\overrightarrow{EG}(1\ ;\ 4,2)$

   et donc : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}\ (3+1\ ;\ -3+4,2)$ ce qui donne $\boxed{\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}\ (4\ ;\ 1,2)}$

2. Déterminer les coordonnées de H tel que $EFGH$ soit un parallélogramme.

   $EFGH$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$
   $\overrightarrow{HG}(-1-x_H\ ;\ 1,2-y_H)$ et $\overrightarrow{EF}(3\ ;\ -3)$
   Ainsi, $-1-x_H=3$ et $1,2-y_H=-3$ ce qui donne $x_H=-4$ et $y_H=4,2$

   Finalement $\boxed{H(-4\ ;\ 4,2)}$

3. Montrer que $EFGH$ n'est pas un losange.

   Le repère est orthonormé donc on peut utiliser la formule donnant la longueur d'un segment :

   $EF=\sqrt{(1-(-2))^2+(-6-(-3))^2}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}$
   $GF=\sqrt{(1-(-1))^2+(-6-1,2^2}=\sqrt{(-2)^2+(-7,2)^2}=\sqrt{4+51,84}=\sqrt{55,84}$

   Ce parallélogramme a deux côtés qui n'ont pas la même longueur : ce n'est pas un losange.

4. Calculer les coordonnées du symétrique de F par rapport à E.

   Notons F' ce symétrique ; dire que F' est le symétrique de F par rapport à E est équivalent à dire que E est le milieu de $[FF']$

   On exprime les coordonnées du milieu en fonction des coordonnées des extrémités du segment :

   $x_E=\dfrac{x_F+x_{F'}}{2}$ et $y_E=\dfrac{y_F+y_{F'}}{2}$

   En remplaçant les valeurs connues, on obtient : $-2=\dfrac{1+x_{F'}}{2}$ et $-3=\dfrac{-6+y_{F'}}{2}$

   Ces deux équations deviennent : $1+x_{F'}=-4$ et $-6+y_{F'}=-6$

   On obtient au final : $x_{F'}=-5$ et $y_{F'}=0$; $\boxed{F'(-5\ ;\ 0)}$

Exercice 7 : Exercice « Bonus » / ? points

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$, $C(1; -1)$ et $D(6; 1)$

Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Si oui, quelles sont les coordonnées du point d'intersection ?

On peut déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}(3\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{CD}(5\ ;\ 2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (l'ordonnée est doublée, mais pas l'abscisse), ce qui signifie que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

On peut trouver le point d'intersection en établissant les équations des deux droites et en résolvant un système d'équations. (Ce sera l'objet d'un prochain chapitre) ; on présente ici une méthode plus originale :

$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
$\iff$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
Cela donne numériquement : $x_M + 2 = k \times 3$ et $y_M - 1 = k \times 1$
Et finalement : $x_M = 2 + 3k$ et $y_M = 1 + k$

On tient le même raisonnement avec la droite (CD), puisque le point M appartient aussi à cette droite :

$M \in (CD) \iff \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
$\iff$ il existe un réel k' tel que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$
Cela donne numériquement : $x_M - 1 = k' \times 5$ et $y_M + 1 = k' \times 2$
Et finalement : $x_M = 1 + 5k'$ et $y_M = -1 + 2k'$

On en déduit : $x_M = 2 + 3k = 1 + 5k'$ et $y_M = 1 + k = -1 + 2k'$

Reste à trouver les valeurs de k et k' en résolvant le système :

$3k - 5k' = 3$ et $k - 2k' = -2$ ce qui donne par exemple $k' = 9$; en remplaçant k' par sa valeur, on obtient :

$x_M = 1 + 5k' = 1 + 45 = 46$ et $y_M = -1 + 2k' = -1 + 18 = 17$

$\boxed{\text{le point d'intersection a pour coordonnées } (46\ ;\ 17)}$