

durée : 4 h**calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Exercice 1 :

/2 points

Commun à tous les candidats**Restitution organisée de connaissances**

Définition : dire que deux événements A et B d'un même univers sont indépendants est équivalent à dire :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On rappelle par ailleurs la formule des probabilités totales : « si A_1 et A_2 sont deux événements incompatibles, alors pour tout événement B , on a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$. »

En utilisant cette définition et au besoin ce théorème, montrer que si les événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants (où $\overline{B}$ désigne l'événement contraire de l'événement B).

Exercice 2 :

/4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

- a. 6 b. 7 c. 10 d. 12

L'événement « le tireur atteint la cible au moins une fois » est le contraire de l'événement « le tireur rate toujours sa cible ». On a donc $p_n = 1 - 0,7^n$. Par conséquent :

$$p_n \geq 0,9 \iff 1 - 0,7^n \geq 0,9 \iff 0,1 \geq 0,7^n \iff \ln(0,1) \geq n \ln(0,7) \iff$$

$$\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \leq n.$$

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \approx 6,4$. La plus petite valeur possible de n est donc 7 : **réponse b**).

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0 ; +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

- a. 0,271 b. 0,135 c. 0,865 d. 0,729

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est : $p(X > 10000) = 1 - p(X \leq 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{10000} = e^{-0,0002 \times 10000} = e^{-2} \approx 0,135$: **réponse b).**

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

- a. $\frac{125}{3888}$ b. $\frac{625}{648}$ c. $\frac{25}{7776}$ d. $\frac{3}{5}$

Le nombre X de fois où le joueur perd au cours d'une partie suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{6})$, donc :

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888} : \text{réponse a).}$$

4. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$. La probabilité de l'événement B est :

- a. 0,5 b. 0,35 c. 0,46 d. 0,7

A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

L'égalité $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ devient donc :

$0,65 = 0,3 + p(B) - 0,3p(B)$, qui équivaut à $0,35 = 0,7p(B)$, d'où $p(B) = 0,5$: **réponse a).**

Exercice 3 :

/6 points

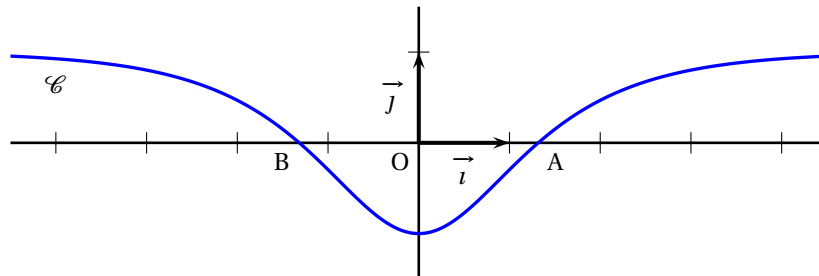
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

a. Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$.

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs strictement positives, alors la fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{4e^x(e^{2x} + 1) - 2e^{2x} \times 4e^x}{(e^{2x} + 1)^2} = -\frac{4e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

- b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x ,

$$\frac{4e^x}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$$

alors $f'(x)$ est du même signe que $e^{2x} - 1$.

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x > 0$, on a $2x > 0$, alors $e^{2x} > e^0$ soit $e^{2x} - 1 > 0$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, alors

$$f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[$$

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

Démontrer que cette conjecture est vraie.

f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} = 1 - \frac{4e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Ainsi la fonction f est paire et, graphiquement :

$$\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } x = 0$$

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

- a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Les coordonnées du point A sont } (a, 0) \text{ avec } a > 0 \text{ et } A \in \mathcal{C}, \text{ alors } f(a) = 0 \implies 1 - \frac{4e^a}{e^{2a} + 1} = \\ \frac{e^{2a} - 4e^a + 1}{e^{2a} + 1} = 0 \implies (e^a)^2 - 4e^a + 1 = 0 \end{aligned}$$

Si on pose $c = e^a$, alors

$$c \text{ est une solution de l'équation } x^2 - 4x + 1 = 0$$

En déduire la valeur exacte de a .

On résout l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$; elle admet deux solutions réelles positives $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, alors $a \in \{\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})\}$.

Puisque $2 - \sqrt{3} \in]0; 1[$, alors $\ln(2 - \sqrt{3}) < 0$ et, a étant positif :

$$a = \ln(2 + \sqrt{3})$$

b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et s'annule en $a = \ln(2 + \sqrt{3})$ alors, en utilisant la parité de f , on en déduit :

- $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$;
- $f(x) < 0$ si $x \in]-a; a[$;
- $f(-a) = f(a) = 0$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

On reconnaît, sous forme intégrale, l'expression de la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction f , alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$ se déduisent alors du signe de $f(x)$:

- F est strictement croissante sur $] -\infty ; -a]$ et sur $[a ; +\infty[$;
- F est strictement décroissante sur $]-a ; a[$.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leq F(a) \leq 0$.

f étant continue et négative sur $[0 ; a]$, $F(a) = \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a |f(t)| dt$ est l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Ce domaine est contenu dans un rectangle dont les dimensions sont $|f(0)| = 1$ et a , alors $0 \leq -F(a) \leq 1 \times a$, d'où :

$$-a \leq F(a) \leq 0$$

3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout réel positif t , $f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$.

$$\text{Soit } t \in [0, +\infty[, \quad f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}(1+e^{-2t})} = 1 - 4e^{-t} \times \left(\frac{1}{1+e^{-2t}} \right).$$

On est donc amené à comparer $\frac{1}{1+e^{-2t}}$ avec 1 ;

Soit $t \geq 0$, on a : $e^{-2t} > 0$, puis : $e^{-2t} + 1 > 1$,
alors, par stricte décroissance de la fonction « inverse » sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} < 1$$

En multipliant chaque membre par $-4e^{-t} < 0$:

$$\frac{-4e^{-t}}{1+e^{-2t}} > -4e^{-t}$$

Finalement, en ajoutant 1 :

$$\text{Pour tout réel positif } t, \quad f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$$

b. En déduire que pour tout réel positif x , $F(x) \geq x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit $x \geq 0$.

Puisque l'intégrale entre des bornes croissantes « conserve l'ordre », alors (d'après la question précédente) :

$$\underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{F(x)} \geq \underbrace{\int_0^x (1 - 4e^{-t}) dt}_{[t+4e^{-t}]_0^x}$$

$$[t + 4e^{-t}]_0^x = x + 4e^{-x} - 4 \geq x - 4, \text{ car } e^{-x} > 0. \text{ On a bien :}$$

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x, F(x) \geq x - 4}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 = +\infty$, par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty}$$

4. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Puisque la fonction f est paire, on peut penser que sa primitive F qui s'annule en 0 est impaire, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = -F(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}, F(-x) + F(x) = 0$$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(-x) + F(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie, pour tout réel x , par $-f(-x) + f(x) = 0$ car f est paire, alors :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, F(-x) + F(x) = F(-0) + F(0) = 0. \text{ Alors } F \text{ est impaire.}$$

Par imparité :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty}$$

Exercice 4 :

/3 points

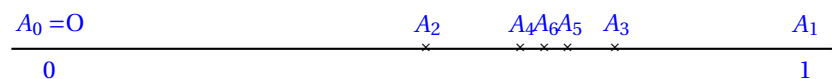
Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(O; \vec{i})$.

Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n , le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

1. a. Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ et A_6 .
On prendra 10 cm comme unité graphique.



- b. Pour tout entier naturel n , on note a_n l'abscisse du point A_n .
Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 .

$$\text{On a } a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2} = 0,5, \text{ puis } a_3 = 0,75, a_4 = 0,625, a_5 = 0,6875 \text{ et } a_6 = 0,65625$$

- c. Pour tout entier naturel n , justifier l'égalité : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

$$\text{Puisque le point } A_{n+2} \text{ est le milieu du segment } [A_n A_{n+1}] \text{ cela se traduit en abscisses par } a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n , $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

Initialisation : $-\frac{1}{2}a_0 + 1 = -0 + 1 = 1 = a_1$. La formule est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$ tel que $a_{p+1} = -\frac{1}{2}a_p + 1$, qui équivaut à $a_p = 2 - 2a_{p+1}$.

Alors $a_{p+2} = \frac{a_p + a_{p+1}}{2} = \frac{2 - 2a_{p+1} + a_{p+1}}{2} = \frac{2 - a_{p+1}}{2} = 1 - \frac{1}{2}a_{p+1}$, donc la relation est vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_n = a_n - \frac{2}{3}.$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

On a pour tout naturel n , $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n$.

La relation pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (a_n) .

On sait que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $-1 < -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Comme $a_n = v_n + \frac{2}{3}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 5 :

/2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \iff \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ (avec } k \text{ et } k' \text{ nombres entiers relatifs)}$$

$$\text{Au final, } x \text{ est de la forme : } x = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \text{ ou } x = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

b. $\ln(x+1) + \ln(x+7) = 0$

$$\ln(x+1) + \ln(x+7) = 0 \iff \ln((x+1)(x+7)) = \ln(1) \text{ et } x+1 > 0 \text{ et } x+7 > 0$$

$$\text{On résout } x^2 + x + 7x + 7 = 1 \iff x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$\text{On calcule le discriminant : } \Delta = 8^2 - 4 \times 6 \times 1 = 64 - 24 = 40$$

$$\text{Ainsi : } x_1 = \frac{-8 - \sqrt{40}}{2} = -4 - \sqrt{10} \text{ ou } x_2 = -4 + \sqrt{10}$$

Avec les conditions $x+1 > 0$ et $x+7 > 0$ (qui revient à $x > -1$), on ne conserve qu'une solution : $x_2 = -4 + \sqrt{10}$

Conclusion : $\mathcal{S} = \{-4 + \sqrt{10}\}$

2. Soit $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (1-i)z - i$, où z est un nombre complexe.

a. Montrer que i est une racine du polynôme P .

$$P(i) = i^3 + (1-i)i^2 + (1-i)i - i = -i - 1 + i + i - (-1) - i = 0 : i \text{ est racine de } P.$$

b. Déterminer les nombres réels a et b tels que $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

On développe l'expression proposée :

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - aiz - ib = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - ib$$

Par identification avec l'expression $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (1-i)z - i$, on en déduit : $a-i = 1-i$,
 $b-ai = 1-i$ et $-ib = -i$

Cela permet de trouver : $b = 1$ et $a = 1$ et donc $P(z) = (z-i)(z^2 + z + 1)$

c. Résoudre (dans $\mathbb{C}$) l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \iff (z-i)(z^2 + z + 1) = 0 \iff z-i = 0 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0$$

On résout $z^2 + z + 1 = 0$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Au final, l'équation } P(z) = 0 \text{ a trois solutions : } \mathcal{S} = \left\{ i; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Exercice 6 :

/3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé de l'espace.

Soient A et B les points de coordonnées $(3;2;0)$ et $(1;0;2)$.

1. Donner, en justifiant votre réponse, l'équation paramétrique de paramètre t de la droite (AB) .

$$\text{On détermine les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{AB} : \begin{cases} 1-3=-2 \\ 0-2=-2 \\ 2-0=2 \end{cases}$$

$$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \iff \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=3-2t \\ y=2-2t \\ z=2t \end{cases}$$

2. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation paramétrique (de paramètre $t' \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} x=1-4t' \\ y=8+2t' \\ z=-22-14t' \end{cases}$$

(AB) et $(\mathcal{D})$ sont-elles parallèles? Sont-elles sécantes? (réponses à justifier)

D'après l'équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$, on peut déterminer un vecteur directeur de cette

$$\text{droite : } \vec{d} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ ne sont pas parallèles.

Pour savoir si elles sont sécantes, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 3-2t = 1-4t' \\ 2-2t = 8+2t' \\ 2t = -22-14t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-4t = 2-8t' \\ 6-6t = 24+6t' \\ 2t = -22-14t' \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières lignes du système, on obtient : $2t = -22 - 14t'$: cela montre que ce système de trois équations à deux inconnues est **compatible**, ce qui veut dire qu'il y aura une solution unique (qui s'obtient en ne conservant que les deux premières lignes du système), ce qui veut dire que les deux droites sont sécantes.

On résout ce système, en soustrayant les deux premières lignes du système de départ : $1 = -7 - 6t'$ ce qui donne $t' = -\frac{4}{3}$ puis $t = -\frac{5}{3}$

En remplaçant t dans l'équation paramétrique de $\overrightarrow{AB}$ par $-\frac{5}{3}$ (ou en remplaçant t' dans l'équation paramétrique de $\vec{d}$ par $-\frac{4}{3}$, on obtient les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites (qu'on peut noter I) : $I\left(\frac{19}{3}; \frac{16}{3}; -\frac{10}{3}\right)$

3. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace dont on donne les équations paramétriques (de paramètres u et v pour $\mathcal{P}_1$ et de paramètres u' et v' pour $\mathcal{P}_2$) dans le repère $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x=1+2u \\ y=u+v \\ z=2+u \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x=2+u'+v' \\ y=u' \\ z=v' \end{cases}$$

Déterminer l'intersection des deux plans (si elle existe).

Si un point $M(x; y; z)$ appartient aux deux plans, il existe u, v, u' et v' tels que :

$$\begin{cases} x=1+2u \\ y=u+v \\ z=2+u \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x=2+u'+v' \\ y=u' \\ z=v' \end{cases}$$

Ainsi, on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1+2u=2+u'+v' \\ u+v=u' \\ 2+u=v' \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations à 4 inconnues : l'idée est d'exprimer chaque coordonnée en fonction d'un seul paramètre ; en remplaçant u' et v' par $u+v$ et $2+u$ dans la première ligne, on obtient : $1+2u = 2 + (u+v) + (2+u)$, ce qui donne : $v = -3$

Reste à tout exprimer en fonction de u :

$$\begin{cases} x=1+2u \\ y=u+v=u-3 \\ z=2+u \end{cases}$$

Ainsi, l'intersection de ces deux plans est la droite passant par le point de coordonnées $(1; -3; 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(2; 1; 1)$.

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont indépendantes

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) .
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
 - a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
 - b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
 - c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?