durée : 4 heures **calculatrice autorisée**

Nom Prénom :

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Des réponses peuvent être complétées sur cette feuille. Vous rendrez cette feuille (n'oubliez pas d'**inscrire votre nom**) accompagnée de votre copie.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

---

***Exercice* 1** : /5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0$

   $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$

2. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

   $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}(5 - 3\mathrm{e}^{-x})$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\mathrm{e}^{-x}$.
   Or, $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$.

   Donc, si $x \geqslant 0$, $x > \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ (ce dernier terme est inférieur à 0 puisque $\dfrac{3}{5}$ est inférieur à 1), on a $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0$ et donc $g(x) > 0$
   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

   La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
   Quelle interprétation (graphique) faites-vous de ce résultat par rapport à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$?

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ (par composition, puisque $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$)

   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$

   Ainsi, par produit et par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

   Cela signifie graphiquement que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ se rapprochent pour les grandes valeurs des abscisses : on dit que la droite $\mathscr{D}$ est « asymptote oblique » à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

   Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $MN = \mid f(x) - (x-3) \mid = \mid g(x) \mid = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.

   Si u est dérivable,$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$.
   La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2\times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}$.

3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

   g étant dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{array}{rll} g'(x) \geqslant 0 & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 & \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \dfrac{5}{6} & \\ & \Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \Leftrightarrow x \leqslant \ln\left(\dfrac{6}{5}\right) & \end{array}$$

   En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$$g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 5\times\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}} - 3\times\left(\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}}\right)^2 = 5\times\frac{5}{6} - 3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{36} = \frac{25}{12}.$$

   La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\dfrac{25}{12}$ unités.

***Exercice* 2** : /4 points

Commun à tous les candidats

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\frac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   On répète 10 fois la même expérience (gratter une carte) de manière indépendante (les cartes n'ont pas de rapport les unes avec les autres), la probabilité de succès de chaque partie est de $\frac{1}{10}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$.

   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près. Peut-on dire que le joueur a raison d'être « sûr » de gagner ?

   On cherche : $P(X \geqslant 1)$; on peut passer par l'évènement contraire :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

   $P(X = 0)$ se calcule directement (par la calculatrice) ; on obtient : $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0,35 \approx 0,65$

   Le joueur a donc environ deux chances sur trois de gagner en grattant 10 cartes à jouer : on ne peut pas affirmer qu'il va gagner à « coup sûr ».

   c. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

   $E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1$

   Cela signifie que si on répète un grand nombre de fois ces séries de 10 grattages, en moyenne, on gagnera une fois par série.

2. Le joueur a développé une addiction forte aux jeux. Il joue 100 cartes à gratter.

   a. A votre avis, combien de parties va-t-il gagner ?

   Si on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$.

   Le joueur peut « espérer » gagner $E(Y) = 100 \times \frac{1}{10} = 10$ fois.

   b. Il a gagné 13 parties et est donc convaincu qu'il est dans un jour de chance exceptionnel ; qu'en pensez-vous ?

   En lisant le tableau ci-dessous, on constate que l'intervalle de fluctuation à 95 % est [5 ; 16] ; 13 se trouvant dans cet intervalle, on ne peut pas dire que l'on soit dans une situation exceptionnelle. Le joueur a eu de la chance certes, mais pas de manière « anormalement » marquée.

Pour vous aider à argumenter votre réponse, on vous donne ci-dessous un extrait de la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$, ainsi que les probabilités cumulées ($P(X \leqslant k)$). On pourra déterminer à l'aide de ce tableau l'intervalle de fluctuation à 95 % du nombre de parties gagnées par le joueur, lorsqu'il fait 100 parties avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ de gagner à chaque partie.

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	2,6561E-005	2,6561E-005
1	0,000295127	0,000321688
2	0,001623197	0,001944885
3	0,005891602	0,007836487
4	0,015874596	0,023711083
5	0,033865804	0,057576886
6	0,059578729	0,117155615
7	0,088895246	0,206050862
8	0,114823027	0,320873888
9	0,130416277	0,451290165
10	0,131865347	0,583155512
11	0,119877588	0,7030331
12	0,098788012	0,801821113
13	0,074302095	0,876123207
14	0,051303827	0,927427035
15	0,032682438	0,960109473
16	0,019291717	0,97940119
17	0,010591531	0,989992721
18	0,005426525	0,995419246
19	0,002602193	0,998021439
20	0,001170987	0,999192426
21	0,000495656	0,999688082
22	0,000197762	0,999885844
23	7,4519E-005	0,999960363
24	2,6565E-005	0,999986927
...	...	...
99	9,0000E-098	1
100	1,0000E-100	1

***Exercice* 3** : /5 points

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a. En utilisant les données de l'énoncé, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique, donc pour tout n, $u_n = u_0 \times r^n = 10 \times 0,8^n$.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \dfrac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.
On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n < 0,1 &\iff 10 \times 0,8^n < 0,1 \\
&\iff 0,8^n < 0,01 \\
&\iff \ln\left(0,8^n\right) < \ln 0,01 && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} && \text{car } \ln 0,8 < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ donc c'est au bout de 21 minutes que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.
On trouve à la calculatrice que $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
Variables :        n est un entier naturel.
                   v est un nombre réel.
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10.
Traitement :       Pour n allant de 1 à 15
                     | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                     | Si v < 5 alors affecter à v la valeur v + 4
                     | Afficher v.
                   Fin de boucle.
```

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

```
Variables :        n est un entier naturel.
                   v est un nombre réel.
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10.
Traitement :       Pour n allant de 1 à 30
                      Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                      Si v ⩽ 6 alors affecter à v la valeur v + 2
                      Afficher v.
                   Fin de boucle.
```

3. On programme la machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.
On peut donc dire que, pour tout n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8(z_n + 5) - 4 = 0,8z_n + 4 - 4 = 0,8z_n$
$z_0 = w_0 - 5$; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$.
La suite (z_n) est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0,8$.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout n :
$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$.
Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout n, $w_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

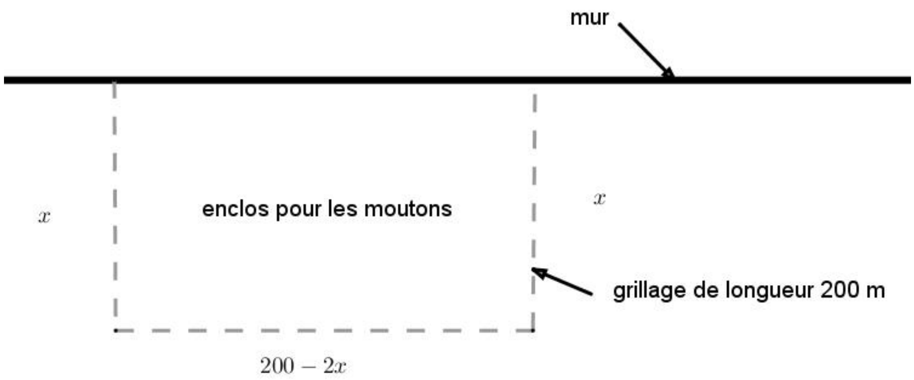
La suite (z_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (w_n) est convergente vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite (w_n) est convergente et a pour limite 5.
Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

***Exercice* 4** : /2 points

Commun à tous les candidats

Le père Louis veut faire un enclos pour ses moutons. Il dispose pour cela de 200 m de grillage.

Le hasard faisant bien les choses, le champ qu'il veut utiliser est adossé à un mur, où il n'a pas besoin d'installer de grillage.



Pour le bien-être de ses moutons, le père Louis souhaite qu'ils disposent de la surface d'herbe la plus grande possible. Il souhaite aussi que son champ ait une forme rectangulaire.

Aidez le père Louis à installer ses 200 m de grillage de la manière la plus optimisée qu'il soit. Quelle est alors l'aire du champ grillagé ?

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.

On note x la largeur du champ constitué par le grillage ; la longueur correspondante est alors égale à $200 - 2x$; l'aire du champ est égale à $x \times (200 - 2x)$.

On a ainsi défini une fonction « Aire » que l'on peut noter : $A(x) = (200 - 2x) \times x$, pour x variant de 0 à 100.

Cette fonction est nulle pour $x = 0$ et $x = 100$, ce qui est bien normal si on regarde la configuration du champ dans ces conditions.
On va étudier cette fonction en calculant sa dérivée : $A'(x) = 200 - 4x$

Cette dérivée est positive pour $x \in [0;50]$, négative pour $x \in [50;100]$; la fonction admet un maximum pour $x = 50$.

On aurait aussi pu remarquer que la fonction Aire est une fonction trinôme qui a pour racines 0 et 100 : elle atteint son extremum au milieu des racines c'est-à-dire en $x = 50$**.**

L'aire est donc maximum pour $x = 50$ **et elle est égale à** $A(50) = 50 \times (200 - 2 \times 50) = 5000$ **m**^{2}**.**

Exercice 5 : /5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**

   Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

   C'est faux : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ est croissante, et pourtant elle converge vers 0.**Proposition fausse.**

2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$

   Proposition 2

   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   $g(x) = 2x\ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x = 2x\ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x(1-\ln(2x+1)) = 0$; l'équation $g(x) = 2x$ admet donc pour solution $x = 0$ donc : **proposition fausse.**

   Proposition 3

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

   $g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \dfrac{2}{2x+1}$ donc $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + 1$; or $2\ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$ donc le coefficient directeur de la tangente est égal à $1+\ln 4$.

   Proposition vraie.

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5+3t \end{array}\right.$

   On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

   Proposition 4

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 5-2t \\ y = -1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{array}\right.$

   Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.
   Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.
   Proposition vraie.

   Proposition 5

   Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

   Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes ou parallèles.
   Pour cela on résout le système

$$\left\{\begin{array}{lll} 2t & = 5-2t' & (1) \\ 1+t & = -1+t' & (2) \\ -5+3t & = -2+t' & (3) \end{array}\right.$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t-6=-1$ soit $t=\dfrac{5}{2}$.

On remplace dans (2) : $t'=-2+t=-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.
On vérifie dans (1) : $2t=5$, alors que $5-2t'=5-1=4$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution : les deux droites ne sont pas sécantes.
Pour savoir si elles sont parallèles, on va étudier un vecteur directeur de chacune : pour $\mathcal{D}$, $\vec{d}(2\,;\,1;\,3)$ et pour (AB), $\vec{u}(-2\,;1\,;\,1)$ (ces vecteurs s'obtiennent à partir des équations paramétriques des droites). Pour passer de l'abscisse d'un vecteur à l'autre, il faut multiplier par -1, ce qui n'est pas le cas des ordonnées : les vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

En conclusion, les droites ne sont ni sécantes, ni parallèles : elles ne sont pas coplanaires ; **proposition fausse.**

Exercice **6** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Question 1

Albert dit : "Avec a et b deux entiers positifs non nuls, si $a+b$ est un nombre premier, alors a est premier avec b ".

Est-ce vrai ou faux ? Justifier votre réponse en détail.

Question 2

Définition : pour un entier n, " factorielle n " est un nombre qui se note $n!$ avec : $n!=1\times 2\times 3\times \ldots\times (n-1)\times n$ (exemple : $4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$)

Béa dit : " Sans calculatrice, je peux te dire que 9! a plus de 200 diviseurs positifs."

Est-ce vrai ou faux ? Justifier votre réponse en détail.

Question 3

On rappelle le théorème de Gauss :

Soient a, b, c trois entiers non nuls.

Si a est premier avec b et que a divise bc, alors a divise c.

Démontrer ce théorème.

Question 4 : codage affine

On code une lettre par codage affine selon le principe suivant :

- Chaque lettre correspond à un entier entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- L'émetteur et le récépteur du message choisissent deux nombres a et b tel que a est premier avec 26.
- Une lettre x se code en y qui est le reste dans la division euclidienne de $ax+b$ par 26, c'est à dire : $y\equiv ax+b(mod 26)$ et $0\leqslant y<26$

Dans cet exercice, on choisit $a = 7$ et $b = 10$.

1a) Codage : vérifier que E se code en M.

b) Démontrer que deux lettres différentes x_1 et x_2 ne peuvent pas se coder en un même y. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

2) Décodage : vous avez reçu le message " NEL ", et vous devez retrouver la méthode pour le décoder lettre par lettre.

a) Déterminer par le moyen de votre choix un entier k tel que $7k\equiv 1(mod 26)$

b) En déduire que $x\equiv 15y+6(mod 26)$

c) Décoder le mot " NEL ".