Proposition de corrigé

Vous rendrez le sujet avec votre copie ; certaines réponses peuvent être inscrite directement sur la copie.

Exercice 1 */4 points*

1. résolvez l'équation $3x^2 - 5x = 25$

   On peut écrire cette équation sous forme plus habituelle : $3x^2 - 5x - 25 = 0$

   On calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-25) = 25 + 300 = 325$: il y a deux solutions.

   $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{325}}{2 \times 3} = \dfrac{5 - 5\sqrt{13}}{6}$; $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{325}}{2 \times 3} = \dfrac{5 + 5\sqrt{13}}{6}$

2. résolvez l'inéquation $-2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0$

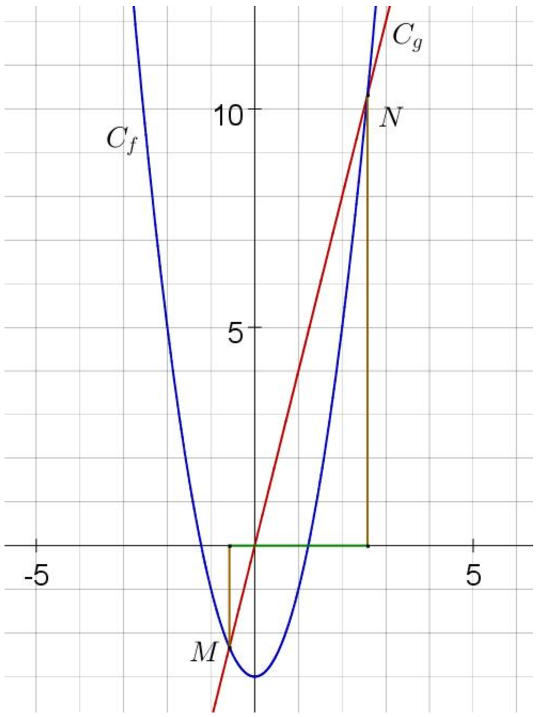
   On calcule le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$: ce trinôme n'a pas de racines.

   Ce trinôme a donc un signe constant. Il est négatif (on peut le constater en testant une valeur ; par exemple, si on remplace x par 0, cela donne (-5) qui est un nombre négatif ; on peut aussi le savoir en remarquant que le coefficient devant x^2 est négatif : un trinôme avec un discriminant négatif et un coefficient devant x^2 négatif est toujours négatif).

   Ainsi, quelle que soit la valeur de x, $-2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0$; cela signifie que tout nombre est solution de l'inéquation proposée.

   Cela s'écrit : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

3. (a) construisez dans le même repère (ci-dessous), les représentations graphiques des fonctions $f(x) = 2x^2 - 3$ et $g(x) = 4x$ sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$



(b) résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$

La courbe C_f est en dessous de la courbe C_g pour les valeurs de x comprises approximativement entre -0,6 et 2,6.

Ainsi, les solutions de cette inéquation sont à prendre dans l'intervalle $[-0,6; 2,6]$

(c) résolvez (algébriquement) $2x^2 - 3 \leqslant 4x$

Cela revient à résoudre $2x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$; pour cela, on recherche le signe du trinôme $2x^2 - 4x - 3$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 40$

Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{40}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{40}}{4} = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$

On peut construire un tableau de signes ou utiliser directement le résultat du cours : le signe du trinôme est le signe du coefficient a à l'extérieur des racines, le signe opposé à l'intérieur des racines.

Ici, on cherche les valeurs de x pour lesquelles le trinôme est négatif ; c'est à l'intérieur des racines.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right]$

(d) vérifiez la cohérence des résultats trouvés en (a) et en (b).

D'une part : $\frac{2-\sqrt{10}}{2} \approx -0,58$ et d'autre part : $\frac{2+\sqrt{10}}{2} \approx 2,58$.

Les résultats graphiques et algébriques sont bien cohérents.

Exercice 2 *\/4 points*

Jeu du PILE ou FACE

1) Des groupes d'élèves doivent déterminer la fréquence de sortie de PILE lors de lancers de PILE ou FACE.

Le tableau suivant donne les résultats de différents groupes :

groupe	fréquence du PILE	nombre de lancers
groupe n°1	40 %	10
groupe n°2	50 %	50
groupe n°3	60 %	100

Si on regroupe les résultats des trois groupes, quelle est la fréquence d'apparition du PILE ?

Il faut calculer le nombre de PILE de chaque groupe :

* groupe n°1 : $40\% \times 10 = 4$

* groupe n°2 : $50\% \times 50 = 25$

* groupe n°1 : $60\% \times 100 = 60$

Au total, il y a donc $4 + 25 + 60 = 89$ PILE sur un total de 160 lancers.

Cela donne une fréquence de $\dfrac{89}{160} \approx 56\%$

2) On décide de simuler ces lancers de pièce en utilisant un Tableur.

a) Expliquez comment, à partir de a formule $\boxed{=ALEA()}$, on peut simuler un jeu de PILE ou FACE.

Quels sont les avantages, les inconvénients de cette technique par rapport au fait de faire réellement l'expérience ?

* La formule $\boxed{=ALEA()}$ permet d'obtenir aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.
On peut par exemple choisir de dire que si ce nombre est plus petit que 0,5, on considère que PILE est sorti et que dans le cas contraire, on considère que FACE est sorti.

* L'avantage principal de cette technique est qu'elle permet de simuler un grand nombre de lancers de pièce. Il suffit de faire des copier/coller, ou de glisser les formules dans le tableur : ça gagne beaucoup de temps ! L'inconvénient principal est qu'on n'est pas vraiment sûr que cette fonction $ALEA()$ donne véritablement un nombre aléatoire ... mais on admettra que c'est le cas.

b) Un extrait d'une feuille de tableur est présenté ci-contre : il s'agit d'une simulation (notée S1) de 10 PILE ou FACE.

Quelle formule faut-il saisir dans les cellules $\boxed{B14}$ et $\boxed{B15}$ pour obtenir le résultat affiché ?

	A	B
1	10 lanc	
2		
3		S1
4	1	0
5	2	0
6	3	0
7	4	1
8	5	0
9	6	1
10	7	0
11	8	1
12	9	0
13	10	0
14	nombre lancers	10
15	fréquence	30%

Il faut saisir :
$\boxed{=A13}$ ou $\boxed{10}$ dans la cellule $\boxed{B14}$ et $\boxed{=SOMME(B4:B13)/10}$ dans la cellule $\boxed{B15}$; la somme permet en effet de compter le nombre 1 et on divise par le nombre total de lancers pour avoir la fréquence.

c) Que se passe-t-il si on appuie sur la touche $\boxed{F9}$?
Peut-on prévoir la valeur qui sera affichée dans la cellule $\boxed{B15}$?

* Si on appuie sur la touche $\boxed{F9}$, le tableur calcule un nouveau nombre aléatoire. La série de 0 et de 1 va être modifiée, la fréquence d'apparition du 1 aussi.

* On peut juste dire que dans la cellule $\boxed{B15}$ peuvent apparaître les valeurs : 0%, 10%, 20% ... 100%

***Exercice* 3** *$/2$ points*

On souhaite savoir si une entreprise exerce une discrimination à l'embauche vis-à-vis du personnel féminin.

S'il n'y a pas de discrimination, la proportion de femmes dans cette entreprise devrait être représentative de la proportion de femmes dans la population active. On admet que la proportion de femme dans la population active est 0,5.

1) En utilisant l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, déterminez si une entreprise comprenant 1 183 femmes sur 2 540 salariés exerce une discrimination à l'égard des femmes.

On est dans les conditions permettant d'utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation à 95% ($p = 0,5 \in [0,2; 0,8]$ et $n = 2540 > 25$)

Cela donne :
$\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,5 - 0,02; 0,5 + 0,02] = [0,48; 0,52]$ La fréquence des femmes dans cette entreprise est $\dfrac{1183}{2540} \approx 0,47 \approx 47\%$

Comme $f \notin [0,48; 0,52]$, on peut conclure que cette entreprise exerce une discrimination à l'égard des femmes.

2) Quel doit être le nombre minimal de femmes dans cette entreprise pour que l'on ne puisse plus considérer que cette entreprise exerce une discrimination à l'égard des femmes (on considérera qu'il y a toujours 2 540 employés dans l'entreprise).

La fréquence de femme doit être au minimum égale à 0,48 ; autrement dit, les femmes doivent représenter au moins 48% des salariés.

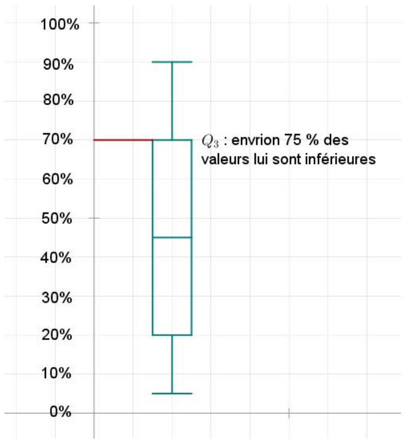
Cela donne : $48\% \times 2540 \approx 1220$.

Ainsi, s'il y a plus de 1220 femmes dans cette entreprise, on pourra considérer que l'entreprise n'exerce pas de discrimination à l'égard des femmes.

Exercice 4 */2,5 points*

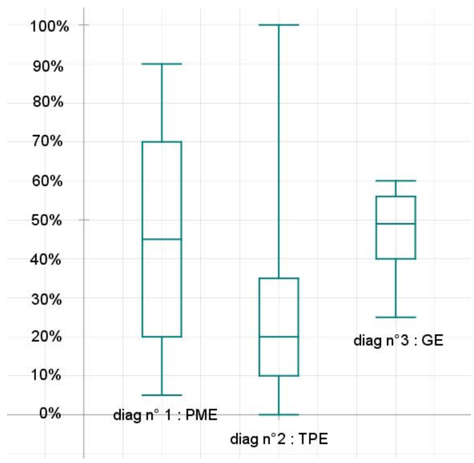
On a mené des enquêtes dans différents type d'entreprise, sur la proportion de femmes qui composent le personnel.
- Les Petites et Moyennes Entreprises (PME), qui comptent moins de 250 employés ;
- Les Entreprises de Taille Intermédiaires (ETI) qui comptent entre 250 et 5 000 salariés ;
- Les Grandes Entreprises (GE) qui comptent plus de 5 000 salariés.

Voici le diagramme en boîte qui résume l'enquête concernant les ETI :



1. Ce diagramme indique que les trois quarts des entreprises de type ETI ont moins de 70 % de femmes au sein de leur personnel. Indiquez la partie du diagramme qui indique cette information.

2. On a mené le même type d'enquête dans les PME et les GE ; on propose, en parallèle du diagramme précédent, un diagramme correspondant aux PME et un diagramme correspondant aux GE : dites quel diagramme correspond aux entreprises PME et celui qui correspond aux entreprises GE, en argumentant votre réponse.



Pour le diagramme n°2 : il existe des entreprises de ce type qui n'ont aucune femme (proportion égale à 0 %) dans leur personnel : cela se voit parce que la valeur minimum du diagramme en boîte n°2 est égale à 0 %. Il serait vraiment étonnant que dans une entreprise de plus de 5 000 salariés (GE), il n'y ait aucune femme ! Ceci est envisageable dans une très petite entreprise (quelques employés, voire un seul employé).

3. Commentez ces diagrammes.

Le diagramme n°3 témoigne d'une situation plus **homogène** : dans les grandes entreprises (plus de 5 000 employés), la proportion de femme est globalement plus proche de 50 %. Ceci se comprend par, en quelque sorte, « la loi des grands nombres ». Si on prend un grand nombre de personnes au hasard (plus de 5 000), la proportion de femmes sera proche de 0,5 (on peut même calculer l'intervalle de fluctuation qui sera de $[48,5\% \; ; \; 51,5\%]$ pour 5 000 salariés).

Le diagramme n°2 témoigne lui d'une situation plus **hétérogène** : les petites entreprises (qui peuvent compter un employé, ou quelques uns) peuvent avoir une proportion de femmes dans leur personnel qui varie de 0 % à 100 % (une entreprise avec une seule femme donne une proportion de 100 %). La situation sera donc plus hétérogène, ce qui est traduit par un diagramme en boîte beaucoup plus étalé.

Le diagramme n°1 est un intermédiaire entre les deux. On peut le détailler :
- on a au minimum 5 % de femmes dans le personnel des ETI ;
- un quart des ETI comptent moins de 20 % de femmes dans leur personnel ;
- la moitié des ETI comptent moins de 45 % de femmes dans leur personnel ;
- les trois quarts des ETI comptent moins de 70 % de femmes dans leur personnel ;
- on a au maximum 90 % de femmes dans le personnel des ETI.

Ces valeurs laissent sous entendre que les femmes sont un peu moins représentées que les hommes dans ces entreprises.

***Exercice* 5** *\/2 points*

Lorenzo et Natacha font un concours de fléchettes. Chacun lance 40 fléchettes.

Résultats de Lorenzo :

points par fléchette	0	10	20	50	100
nombre de fléchettes	11	9	1	8	11

Résultats de Natacha :

points par fléchette	0	10	20	50	100
nombre de fléchettes	4	6	22	5	3

1) Calculez la moyenne de chaque joueur.
Quel est le meilleur joueur ?

Pour Lorenzo :
$$Moy = \frac{0 \times 11 + 10 \times 9 + 20 \times 1 + 50 \times 8 + 100 \times 11}{40} = \frac{1610}{40} = 40,25$$
Lorenzo a une moyenne de 40,25 points par lancer.

Pour Natacha :
$$Moy = \frac{0 \times 4 + 10 \times 6 + 20 \times 22 + 50 \times 5 + 100 \times 3}{40} = \frac{1050}{40} = 26,25$$
Natacha a une moyenne de 26,25 points par lancer.

D'après ces résultats, on peut considérer que Lorenzo a été le meilleur sur cette série de 40 lancers.

2) Calculer la médiane, les premier et troisième quartiles de chaque série de résultats.
Quel est le joueur le plus régulier ?

Pour Lorenzo :
médiane : l'effectif total est 40 ; pour connaître la valeur médiane, on cherche le nombre de points marqués par la 20^{eme} fléchette.
Cette 20^{eme} fléchette a marqué 10 points.
premier et troisième quartiles : l'effectif, partagé en 4 est égal à 10.
La dixième fléchette a marqué 0 points. La trentième fléchette a marqué 100 points.
Pour la série de Lorenzo, la valeur médiane est 20, le premier quartile est 0 et le troisième quartile est 100.

Pour Natacha :
La 20^{eme} fléchette a marqué 20 points.
La dixième fléchette a marqué 10 points. La trentième fléchette a marqué 20 points.
Pour la série de Natacha, la valeur médiane est 20, le premier quartile est 10 et le troisième quartile est 20.

D'après ces résultats, on peut calculer l'écart interquartile, c'est-à-dire la différence entre le troisième et le premier quartile pour constater que les résultats de Lorenzo sont beaucoup hétérogènes que ceux de Natacha.

***Exercice* 6** *[/4 points]*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Si un prix augmente de 4 %, puis baisse de 5 %, alors globalement ce prix a baissé.

   hausse de 4 % : coefficient multiplicateur égal à 1,04 ;
   baisse de 5 % : coefficient multiplicateur égal à 0,95 ;
   les deux évolutions successives : coefficient multiplicateur égal à $1,04 \times 0,95 = 0,988$: cela traduit **une baisse** (de 1,2 %).

2. Une hausse de 25 % est compensée par une baisse de 20 %.

   hausse de 25 % : coefficient multiplicateur égal à 1,25 ;
   baisse de 20 % : coefficient multiplicateur égal à 0,8 ;
   les deux évolutions successives : coefficient multiplicateur égal à $1,25 \times 0,8 = 1$: **il y a une compensation exacte**.

3. Si on diminue le côté d'un carré de 10 %, alors son périmètre diminue de 40 %.

   On note c le côté du carré ; le périmètre est égal à $4c$; si c diminue de 10 %, il est égal à $0,9.c$; le périmètre du nouveau carré est égal à :
   $4 \times 0,9.c = 3,6.c = 0,9 \times$ ancien périmètre ; le périmètre a diminué de 10 %, et **non de 40 %**.

4. Si après une réduction de 20 % un jeu coûte 28 €, alors son prix avant réduction était de 33,60 €.

   $33,6 \times 0,8 = 26,88$ donc c'est **faux**.

5. 28 baisses successives de 1 % correspondent à une baisse de 25 % environ.

   baisse de 1 % : coefficient multiplicateur égal à 0,99 ;
   28 baisses de 1 % : coefficient multiplicateur égal à $0,99^{28} \approx 0,75$, ce qui traduit **une baisse d'environ 25 %**.

***Exercice* 7** *[/1,5 point]*

En 1977, 26 crashs aériens ont été comptabilisés. En 2010, 27 ont été comptabilisés.

Diriez-vous qu'il est plus sûr de prendre l'avion aujourd'hui qu'en 1977 ? *(la réponse est à argumenter)*

Dans l'absolu, il y a eu un accident de plus en 2010 qu'en 1977 ; on pourrait penser qu'il est tout autant dangereux (ou pas plus sûr) de prendre l'avion l'avion aujourd'hui qu'en 1977.

Mais il faut prendre en compte que le fait que le trafic aérien a plus que doublé entre ces deux dates ! Comme le nombre de crashs est resté sensiblement le même, on peut dire qu'il est environ deux fois plus sûr de prendre l'avion aujourd'hui qu'en 1977.