durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /2 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

Définition : dire que deux évènements A et B d'un même univers sont indépendants est équivalent à dire :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On rappelle par ailleurs la formule des probabilités totales : « si A_1 et A_2 sont deux évènements incompatibles, alors pour tout évènement B, on a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$. »

En utilisant cette définition et au besoin ce théorème, montrer que si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants (où $\overline{B}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A).

***Exercice* 2** : /4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

   La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

   a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

   La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

   a. 0,271 **b.** 0,135 **c.** 0,865 **d.** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

   Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

   La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

   a. $\dfrac{125}{3888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que :
   $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

   a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

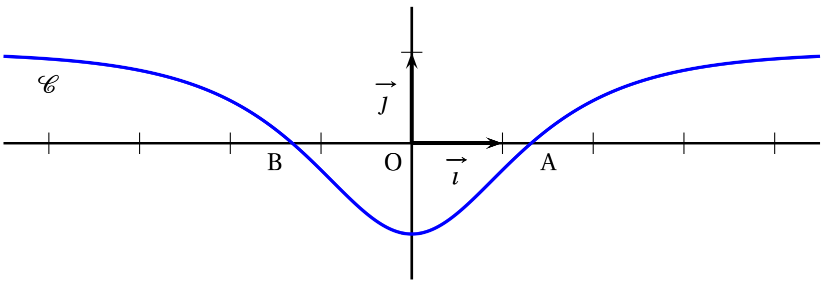
***Exercice* 3** : /6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^a$.
   a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
   En déduire la valeur exacte de a.
   b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.
3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.
   - **a.** Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}^{-t}$.
   - **b.** En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

***Exercice* 4** : /3 points

Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathscr{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

1.
   - **a.** Placer sur un dessin la droite $\mathscr{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
     On prendra 10 cm comme unité graphique.
   - **b.** Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
     Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.
   - **c.** Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.
2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par

   $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

***Exercice* 5** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre les équations suivantes :
   - **a.** $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$
   - **b.** $\ln(x+1) + \ln(x+7) = 0$
2. Soit $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (1-i)z - i$, où z est un nombre complexe.
   - **a.** Montrer que i est une racine du polynôme P.
   - **b.** Déterminer les nombres réels a et b tels que $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.
   - **c.** Résoudre (dans $\mathbb{C}$) l'équation $P(z) = 0$

***Exercice* 6** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormé de l'espace.
Soient A et B les points de coordonnées $(3;2;0)$ et $(1;0;2)$.

1. Donner, en justifiant votre réponse, l'équation paramétrique de paramètre t de la droite (AB).
2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation paramétrique (de paramètre $t' \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} x = 1 - 4\,t' \\ y = 8 + 2\,t' \\ z = -22 - 14\,t' \end{cases}$$

   (AB) et $(\mathscr{D})$ sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ? (réponses à justifier)

3. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans de l'espace dont on donne les équations paramétriques (de paramètres u et v pour $\mathscr{P}_1$ et de paramètres u' et v' pour $\mathscr{P}_2$) dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = u + v \\ z = 2 + u \end{cases}$$

   et

$$\begin{cases} x = 2 + u' + v' \\ y = u' \\ z = v' \end{cases}$$

   Déterminer l'intersection des deux plans (si elle existe).

***Exercice* 7** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont indépendantes

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

Partie B
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors
$q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
   b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
   c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?