durée : 4 heures **calculatrice autorisée**

Nom Prénom :

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Des réponses peuvent être complétées sur cette feuille. Vous rendrez cette feuille (n'oubliez pas d'**inscrire votre nom**) accompagnée de votre copie.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

---

***Exercice* 1** : /5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0$
2. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
   Quelle interprétation (graphique) faites-vous de ce résultat par rapport à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$?

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

***Exercice* 2** : /4 points

Commun à tous les candidats

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\frac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près. Peut-on dire que le joueur a raison d'être « sûr » de gagner ?
   c. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
2. Le joueur a développé une addiction forte aux jeux. Il joue 100 cartes à gratter.
   a. A votre avis, combien de parties va-t-il gagner ?
   b. Il a gagné 13 parties et est donc convaincu qu'il est dans un jour de chance exceptionnel ; qu'en pensez-vous ?

Pour vous aider à argumenter votre réponse, on vous donne ci-dessous un extrait de la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$, ainsi que les probabilités cumulées ($P(X \leqslant k)$). On pourra déterminer à l'aide de ce tableau l'intervalle de fluctuation à 95 % du nombre de parties gagnées par le joueur, lorsqu'il fait 100 parties avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ de gagner à chaque partie.

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	2,6561E-005	2,6561E-005
1	0,000295127	0,000321688
2	0,001623197	0,001944885
3	0,005891602	0,007836487
4	0,015874596	0,023711083
5	0,033865804	0,057576886
6	0,059578729	0,117155615
7	0,088895246	0,206050862
8	0,114823027	0,320873888
9	0,130416277	0,451290165
10	0,131865347	0,583155512
11	0,119877588	0,7030331
12	0,098788012	0,801821113
13	0,074302095	0,876123207
14	0,051303827	0,927427035
15	0,032682438	0,960109473
16	0,019291717	0,97940119
17	0,010591531	0,989992721
18	0,005426525	0,995419246
19	0,002602193	0,998021439
20	0,001170987	0,999192426
21	0,000495656	0,999688082
22	0,000197762	0,999885844
23	7,4519E-005	0,999960363
24	2,6565E-005	0,999986927
...	...	...
99	9,0000E-098	1
100	1,0000E-100	1

***Exercice* 3** : /5 points

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

  a. En utilisant les données de l'énoncé, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; quelle est la nature de la suite (u_n) ?

  b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

  c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.

L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
Variables :        n est un entier naturel.
                   v est un nombre réel.
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10.
Traitement :       Pour n allant de 1 à 15
                     | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                     | Si v < 5 alors affecter à v la valeur v + 4
                     | Afficher v.
                   Fin de boucle.
```

  a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

  b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

  c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

  Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

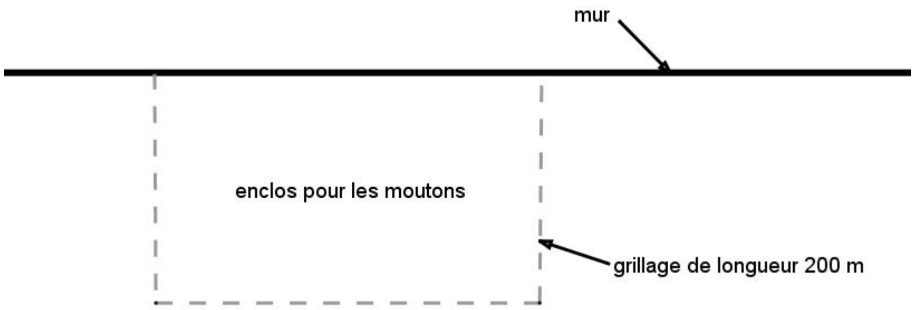
d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

***Exercice* 4** : /2 points

Commun à tous les candidats

Le père Louis veut faire un enclos pour ses moutons. Il dispose pour cela de 200 m de grillage.

Le hasard faisant bien les choses, le champ qu'il veut utiliser est adossé à un mur, où il n'a pas besoin d'installer de grillage.



Pour le bien-être de ses moutons, le père Louis souhaite qu'ils disposent de la surface d'herbe la plus grande possible. Il souhaite aussi que son champ ait une forme rectangulaire.

Aidez le père Louis à installer ses 200 m de grillage de la manière la plus optimisée qu'il soit. Quelle est alors l'aire du champ grillagé ?

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.

Exercice **5** : /5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$

   Proposition 2
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   Proposition 3
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

   On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

   Proposition 4

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

   Proposition 5
   Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Exercice **6** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Question 1

Albert dit : "Avec a et b deux entiers positifs non nuls, si $a+b$ est un nombre premier, alors a est premier avec b ".

Est-ce vrai ou faux ? Justifier votre réponse en détail.

Question 2

Définition : pour un entier n, " factorielle n " est un nombre qui se note $n!$ avec : $n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$ (exemple : $4!=1\times2\times3\times4=24$)

Béa dit : " Sans calculatrice, je peux te dire que 9! a plus de 200 diviseurs positifs."

Est-ce vrai ou faux ? Justifier votre réponse en détail.

Question 3

On rappelle le théorème de Gauss :

Soient a, b, c trois entiers non nuls.

Si a est premier avec b et que a divise bc, alors a divise c.

Démontrer ce théorème.

Question 4 : codage affine

On code une lettre par codage affine selon le principe suivant :

- Chaque lettre correspond à un entier entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- L'émetteur et le récépteur du message choisissent deux nombres a et b tel que a est premier avec 26.
- Une lettre x se code en y qui est le reste dans la division euclidienne de $ax+b$ par 26, c'est à dire : $y\equiv ax+b(mod26)$ et $0\leqslant y<26$

Dans cet exercice, on choisit $a=7$ et $b=10$.

1a) Codage : vérifier que E se code en M.

b) Démontrer que deux lettres différentes x_1 et x_2 ne peuvent pas se coder en un même y. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

2) Décodage : vous avez reçu le message " NEL ", et vous devez retrouver la méthode pour le décoder lettre par lettre.

a) Déterminer par le moyen de votre choix un entier k tel que $7k\equiv1(mod26)$

b) En déduire que $x\equiv15y+6(mod26)$

c) Décoder le mot " NEL ".