Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /1 point

Restitution organisée de connaissances

Dans cet exercice n désigne un entier naturel.

On définit une suite géométrique de la manière suivante : u_0 est donné, et $u_{n+1} = r \times u_n$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n = u_0 \times r^n$.

Démontrons cette propriété par récurrence : pour n entier naturel, on pose : $P(n)$: « $u_n = u_0.r^n$ »

initialisation : pour $n = 0$: $u_0.r^0 = u_0$; la propriété est vérifiée.

hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montré que $P(n+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = u_0.r^{n+1}$.

$u_{n+1} = r.u_n = r.u_0.r^n = u_0.r^{n+1}$: la propriété est héréditaire.

conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout entier n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ; cela montre que pour tout nombre entier naturel, $P(n)$ est vraie.

***Exercice* 2** : /1 point

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$.

On sait que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 est égale à : $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

On va faire quelques transformations pour se ramener à ce type d'écriture :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

On a dans le terme entre parenthèses, une suite géométrique de premier terme 1, de raison $\dfrac{1}{10}$; on applique la formule précédente :

$$\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}}$$

On obtient donc : $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{10^2} \times \dfrac{10}{9} \times \left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

***Exercice* 3** : /2,5 points

On modélise l'évolution de la population d'une ville A de la manière suivante : on considère qu'elle augmente chaque année de 2 % par rapport à l'année précédente.

Pour une ville B, on considère que sa population augmente de 1 500 personnes chaque année.

Au départ (année 0), on considère que la ville A compte 100 000 habitants et la ville B 125 000.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B au bout de n années après l'année 0.

1. **a.** Calculer le nombre d'habitants de la ville A et le nombre d'habitants de la ville B au bout de dix ans.

   Pour la ville A : $100\,000 \times 1,02^{10} \approx 121\,900$.

   Pour la ville B : $125\,000 + 10 \times 1\,500 = 140\,000$.

   b. Quelle est la nature des suites u et v ? En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

   u est une suite géométrique de raison 1,02, de premier terme 100 000 : $u_n = 100\,000 \times 1,02^n$.

   v est une suite arithmétique de raison 1 500, de premier terme 125 000 : $v_n = 125\,000 + 1\,500n$.

2. Déterminer au bout de combien d'années le nombre d'habitants de la ville A dépassera celui de la ville B.

   On cherche à résoudre : $100\,000 \times 1,02^n \geqslant 125\,000 + 1\,500n$; après plusieurs essais, on trouve que cette inégalité est vraie à partir de $n = 25$.

***Exercice* 4** : 3,5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A
Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\frac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   On répète 10 fois la même expérience (gratter une carte) de manière indépendante (les cartes n'ont pas de rapport les unes avec les autres), la probabilité de succès de chaque partie est de $\frac{1}{10}$;
   X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$.

2. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

   On cherche : $P(X \geqslant 1)$; on peut passer par l'évènement contraire :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

   $P(X = 0)$ se calcule directement (par la calculatrice) ; on obtient : $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0,35 \approx 0,65$

3. Combien de parties faudrait-il faire pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 90 % ?

Si Y est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès après n parties, Y suit une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{10}$ et n.

On cherche la valeur de n telle que $P(Y > 0) \geqslant 0,9$; autrement dit, $1 - P(Y = 0) \geqslant 0,9$ ce qui revient à $P(Y = 0) \leqslant 0,1$

Or, $P(Y = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$; on cherche donc la plus petite valeur de n telle que $\left(\frac{9}{10}\right)^n < 0,1$

Après quelques essais, on trouve que $n \geqslant 23$

Il faudra plus de 23 parties pour qu'on soit sûr (à 90 %) qu'il gagne au moins une partie.

Partie B

Dans un pays, un quart des habitants ont les yeux bleus.

On prend un échantillon de 80 individus de ce pays : 16 ont les yeux bleus. Cet échantillon de 80 personnes est-il représentatif de la population totale du pays au regard du critère « avoir les yeux bleus » ? (On attend un résultat argumenté.)

La fréquence de personnes ayant les yeux bleus dans cet échantillon est $\frac{16}{80} = 0,2$: elle n'est pas exactement égale à un quart ; reste à savoir si la différence est due au hasard (par un phénomène de fluctuation d'échantillonnage), ou si l'échantillon a quelque chose de spécial par rapport au fait d'avoir les yeux bleus ou pas.

On peut utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation à 95% parce que la taille de l'échantillon est suffisamment grande ($n = 80 \geqslant 25$) et la probabilité théorique du fait d'avoir les yeux bleus est $p = \frac{1}{4} = 0,25$; elle est bien comprise entre 0,2 et 0,8. Cela donne :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,25 - \frac{1}{\sqrt{80}} ; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{80}}\right] \approx [0,14 ; 0,36]$$

Comme $0,2 \in [0,14 ; 0,36]$, on conclut que cet échantillon est représentatif de la population par rapport au critère « avoir les yeux bleus ».

***Exercice* 5** : /2,5 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

1. $u_n = n\sqrt{n}$

$\lim n = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$; par produit, $\lim u_n = +\infty$

2. $v_n = \dfrac{n^2 + 3n - 5}{3n^4}$

$\lim n^2 = +\infty$ et $\lim(3n - 5) = +\infty$; par somme, $\lim(n^2 + 3n - 5) = +\infty$; comme $\lim v_n = +\infty$, par quotient, on a une forme indéterminée.

$$v_n = \frac{n^2 + 3n - 5}{3n^4} = \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{3n^4} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{3n^2}$$

Par somme, $\lim 1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} = 1$ et donc, comme $\lim 3n^2 = +\infty$, par quotient, $\lim v_n = 0$

3. $w_n = \dfrac{n^2-5}{3n^2+2n-3}$

On a une forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$$w_n = \frac{n^2-5}{3n^2+2n-3} = \frac{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{5}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}$$

Par somme, $\lim 1-\dfrac{5}{n^2}=1$ et $\lim 3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}=3$

Par quotient, $\lim w_n = \dfrac{1}{3}$

***Exercice* 6** : /3 points

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car une racine est toujours positive.

FAUX : cette fonction soit définie si et seulement si $9-x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 9$; ainsi, le domaine de définition est $]-\infty;9]$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+6x+9}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

FAUX : le dénominateur de la fraction est égal à $(x+3)^2$ et s'annule donc en -3 ; la fonction est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(10-x)^4}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{4}{(10-x)^5}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.

VRAI : Cette fonction est bien dérivable sur l'intervalle proposé (du type $\dfrac{u}{v}$ avec v ne s'annulant pas sur l'intervalle proposé).

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

VRAI : Cette fonction est bien dérivable sur l'intervalle proposé (du type $\sqrt{u}$ avec u strictement positif sur l'intervalle proposé).

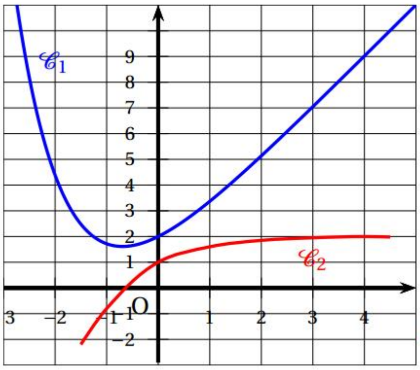
Par ailleurs, $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

***Exercice* 7** : /2 points

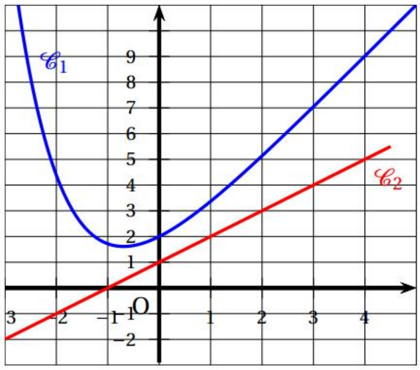
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

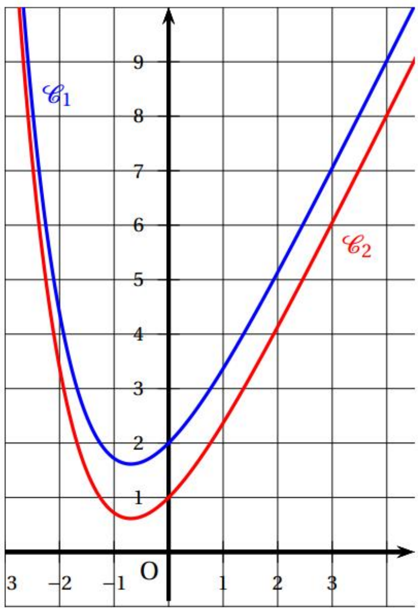
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



La fonction f est décroissante puis croissante, donc la fonction dérivée doit être négative puis positive, ce qui élimine la situation 3.

Si la fonction dérivée est représentée par une droite comme dans la situation 2, c'est que la fonction f est une fonction du second degré ; donc sa représentation graphique possède un axe de symétrie vertical. Ce n'est pas le cas donc on peut éliminer la situation 2.

Autre argument : le minimum de la fonction f est atteint pour une valeur de x strictement comprise entre -1 et 0 ; la dérivée doit donc s'annuler pour cette valeur ce qui élimine la situation 2.

La bonne situation est donc la situation 1.

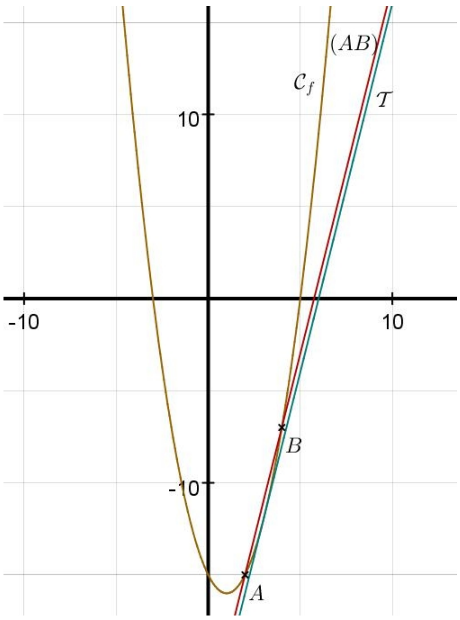
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

La droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A d'abscisse 0, a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0)$ est l'ordonnée de A donc $f(0) = 2$; $f'(0)$ est l'ordonnée du point B donc $f'(0) = 1$.
L'équation réduite de la tangente est donc : $y = x + 2$.

***Exercice* 8** : /3,5 points

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 15$

1. Tracez la représentation graphique de cette fonction dans le repère ci-dessous pour $x \in [-4\ ;\ 6]$. On note $\mathscr{C}_f$ cette courbe.



2. Construisez le tableau de variations de la fonction f.

f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme) et :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$; d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $x-1$		-	0	+	
f		↘	-16	↗	

3. Montrez que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = 4x - 24$; on note $\mathscr{T}$ cette tangente. Construisez la tangente $\mathscr{T}$ dans le repère précédent.

On applique la formule : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$; or, $f(3) = -12$ et $f'(3) = 4$; cela donne :

$y = 4(x-3) - 12$ soit au final $y = 4x - 24$

4. A est le point de la courbe d'abscisse 2 ; B est le point de la courbe d'abscisse 4. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

$A(2\,;\,-15)$ et $B(4\,;\,-7)$

5. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

En notant $y = ax + b$ l'équation de la droite (AB), on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} -15 = 2a + b \\ -7 = 4a + b \end{cases}$$

Par différence entre les lignes, on obtient : $a = \dfrac{-15-(-7)}{2-4} = 4$

En remplaçant a par 4 dans une ligne, on obtient : $b = -23$.
Ainsi, (AB) a pour équation $y = 4x - 23$

6. Justifiez que la droite (AB) et la tangente $\mathscr{T}$ sont parallèles.

La droite et la tangente ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles.

***Exercice* 9** : /1 point

On dispose d'une ficelle de 21 cm de long. On veut, à l'aide de cette ficelle, construire un rectangle. Proposez la situation qui permettra de construire le rectangle d'aire maximale.

Si vous le pouvez, essayez de généraliser le résultat en répondant à la question suivante : quel est le rectangle, qui, à périmètre fixé, a l'aire la plus grande ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.

On note l la largeur de ce rectangle et L sa longueur : $L + l = 21 \div 2 = 10{,}5$

Par ailleurs, $\mathscr{A} = L \times l$ et donc l'aire s'exprime en fonction de l : $\mathscr{A}(l) = l(10{,}5 - l)$

Il s'agit d'un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et en 10,5, avec un coefficient devant le terme au carré positif ; il atteint son maximum en 5,25.

La configuration permettant d'avoir l'aire maximale est donc celle donnant : $l = L = 5{,}25$, ce qui signifie qu'on a à faire à un carré.

Généralisation : on note P le périmètre du carré ; $l + L = P \div 2$ et $\mathscr{A} = l \times L = l \times (P \div 2 - l)$.

Ainsi, $\mathscr{A}$ est une fonction de la variable l (P est un paramètre) ; on reconnaît à nouveau un polynôme du second degré, dont le maximum sera atteint pour $l = P \div 4$; on retrouve de manière plus générale le résultat précédent : le rectangle qui, à un périmètre donné P, a l'aire maximale est le carré de côté $\dfrac{P}{4}$.