durée : 3 heures **calculatrice autorisée**

Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /5 points

Question à choix multiple : à faire sur les feuilles réservées **en pensant à bien colorer la case choisie** (en noir si possible)

***Exercice* 2** : /1,5 point

Restitution organisée de connaissances
Dans cet exercice n désigne un entier naturel.

On définit une suite géométrique de la manière suivante : u_0 est donné, et $u_{n+1} = r \times u_n$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n = u_0 \times r^n$.

Démontrons cette propriété par récurrence : pour n entier naturel, on pose : $P(n)$: « $u_n = u_0.r^n$ »

initialisation : pour $n = 0$: $u_0.r^0 = u_0$; la propriété est vérifiée.

hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montré que $P(n+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = u_0.r^{n+1}$.

$u_{n+1} = r.u_n = r.u_0.r^n = u_0.r^{n+1}$: la propriété est héréditaire.

conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout entier n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ; cela montre que pour tout nombre entier naturel, $P(n)$ est vraie.

***Exercice* 3** : /1,5 point

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Démontrer que $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$.

On sait que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 est égale à : $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On va faire quelques transformations pour se ramener à ce type d'écriture :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

On a dans le terme entre parenthèses, une suite géométrique de premier terme 1, de raison $\frac{1}{10}$; on applique la formule précédente :

$$\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}}$$

On obtient donc : $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^{n+1}}=\frac{1}{10^2}\times\frac{10}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

***Exercice* 4** : /2,5 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

1. $u_n=n\sqrt{n}$

$\lim n=+\infty$ et $\lim\sqrt{n}=+\infty$; par produit, $\lim u_n=+\infty$

2. $v_n=\dfrac{n^2+3n-5}{3n^4}$

$\lim n^2=+\infty$ et $\lim(3n-5)=+\infty$; par somme, $\lim(n^2+3n-5)=+\infty$; comme $\lim v_n=+\infty$, par quotient, on a une forme indéterminée.

$$v_n=\frac{n^2+3n-5}{3n^4}=\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{3n^4}=\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3n^2}$$

Par somme, $\lim 1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}=1$ et donc, comme $\lim 3n^2=+\infty$, par quotient, $\lim v_n=0$

3. $w_n=\dfrac{n^2-5}{3n^2+2n-3}$

On a une forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$$w_n=\frac{n^2-5}{3n^2+2n-3}=\frac{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1-\frac{5}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}$$

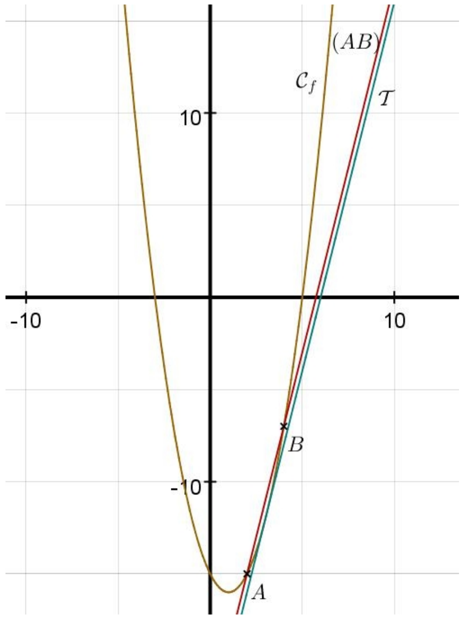
Par somme, $\lim 1-\frac{5}{n^2}=1$ et $\lim 3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}=3$

Par quotient, $\lim w_n=\frac{1}{3}$

***Exercice* 5** : /3,5 points

On considère la fonction $f(x)=x^2-2x-15$

1. Tracez la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé pour $x\in[-4\,;\,6]$. On note $\mathscr{C}_f$ cette courbe.



2. Construisez le tableau de variations de la fonction f.

f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme) et :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$; d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-16	$\nearrow$	

3. Montrez que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = 4x - 24$; on note $\mathscr{T}$ cette tangente. Construisez la tangente $\mathscr{T}$ dans le repère précédent.

On applique la formule : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$; or, $f(3) = -12$ et $f'(3) = 4$; cela donne :

$y = 4(x-3) - 12$ soit au final $y = 4x - 24$

4. A est le point de la courbe d'abscisse 2 ; B est le point de la courbe d'abscisse 4. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

$A(2\,;\,-15)$ et $B(4\,;\,-7)$

5. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

En notant $y = ax + b$ l'équation de la droite (AB), on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} -15 = 2a + b \\ -7 = 4a + b \end{cases}$$

Par différence entre les lignes, on obtient : $a = \dfrac{-15-(-7)}{2-4} = 4$

En remplaçant a par 4 dans une ligne, on obtient : $b = -23$.
Ainsi, (AB) a pour équation $y = 4x - 23$

6. Justifiez que la droite (AB) et la tangente $\mathscr{T}$ sont parallèles.

La droite et la tangente ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles.

***Exercice* 6** : /2 points

Pour pouvoir démarrer une partie de « petits chevaux », il faut avoir le numéro 6 qui sorte sur le dé.

La partie se joue en lançant un dé à 6 faces (que l'on considérera bien équilibré) à tour de rôle ; combien de coups sont nécessaires pour « être sûr » de commencer une partie de « petits chevaux » ?

remarque : on entend par « être sûr » le fait que cela se réalise avec une probabilité supérieure à 0,9

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de numéro 6 sorti lorsque l'on lance le dé ; X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$

Dire que la partie a commencé revient à dire qu'on a eu au moins un numéro 6, donc que $X \geqslant 1$

On va chercher la valeur minimale de n telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9$

Or, $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ et donc l'équation précédente revient à : $P(X = 0) \leqslant 0,1$

Comme $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (\frac{5}{6})^n = (\frac{5}{6})^n$, on cherche à résoudre : $(\frac{5}{6})^n \leqslant 0,1$

En essayant avec la calculatrice, on obtient $n = 13$

Conclusion : après 13 lancers de dé, on est sûr (à 90 %) d'avoir pu commencer la partie.

***Exercice* 7** : /2 points

On considère la somme des n premiers termes impairs : peut-on donner une expression de cette somme en fonction de n (n étant un nombre entier naturel non nul) ?

Aide : un nombre impair quelconque s'écrit $2p + 1$ (avec p nombre entier)

La somme en question s'écrit donc : $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2p + 1 + \cdots + 2n - 1$

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.

1^{ere} approche : par conjecture numérique

On observe : $1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ et donc on conjecture la formule :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = n^2$$

Reste à **démontrer** cette conjecture ; on peut opter pour <u>une démonstration par récurrence</u> :

Initialisation : pour $n = 1$: $S_1 = 1 = 1^2$; la formule fonctionne au rang $n = 1$

Hérédité : on suppose que pour un n fixé, $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$
On veut montrer qu'alors : $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

Or, $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 + 2n + 1 = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

Conclusion : l'initialisation est validée pour $n = 1$, l'hérédité est vérifiée, donc on conclut que pour tout nombre entier $n > 0$, $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$

2^{eme} approche : en utilisant les résultats sur les suites arithmétiques

On remarque que la somme en question est une suite arithmétique de raison 2, de premier terme 1.

On peut utiliser les résultats connus sur la somme d'une suite arithmétique ou le retrouver (c'est ce qui est fait ici) :

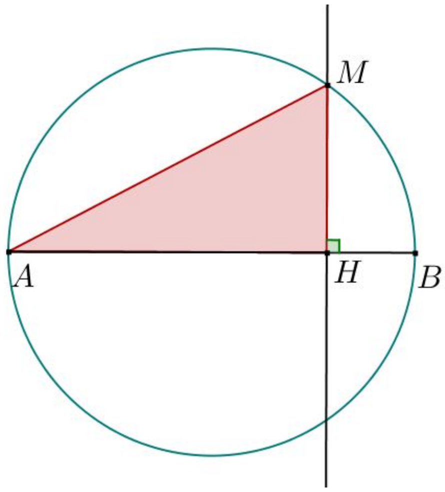
$S_n = 1+3+5+\cdots+2n-1 = 1+(1+2\times 1)+(1+2\times 2)+\cdots(1+2\times p)+\cdots+(1+2\times(n-1))$

Ainsi, $S_n = 1+1+\cdots+1+2(1+2+\cdots+n-1) = n+2\frac{(n-1)n}{2} = n+(n-1)n = n^2$

***Exercice* 8** : /2 points

On considère un cercle de diamètre $[AB]$. On donne : $AB = 8$ cm

On place un point M sur le cercle et on construit son *projeté orthogonal* sur $[AB]$ que l'on nomme H : cela signifie que l'on construit la perpendiculaire à (AB) passant par M, et que l'on nomme H l'intersection de cette droite avec (AB).



Existe-t-il une position du point M telle que l'aire du triangle AMH soit maximale ?

Rappel : l'aire d'un triangle est donnée par :

$$\mathscr{A} = \frac{base \times hauteur}{2}$$

Toute trace de recherche pertinente sera valorisée dans cet exercice.

On note x la longueur AH ; pour que x ait un sens, il faut que : $x \in [0;8]$

$\mathscr{A} = \dfrac{AH \cdot HM}{2}$

Pour déterminer l'aire du triangle AMH, on a besoin de connaître HM.

HM pourra s'obtenir si AM est connu.

Dans les triangles rectangles AMH et AMB, on exprime $\cos(\widehat{HAM})$:

$\cos(\widehat{HAM}) = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AM}{AB}$ ce qui donne : $\dfrac{x}{AM} = \dfrac{AM}{8}$ et donc : $AM^2 = 8x$

En utilisant le théorème de Pythagore dans AMH rectangle en H, on obtient :
$HM^2 = AM^2 - AH^2 = 8x - x^2$

Ainsi, l'aire du triangle AMH est donnée par : $\mathscr{A} = \dfrac{x\sqrt{8x-x^2}}{2}$: c'est cette quantité que l'on cherche à maximiser.
On va être astucieux en disant que l'aire est maximisée lorsque le carré du double est maximisé ; on cherche alors à maximiser la quantité $x^2(8x-x^2) = 8x^3 - x^4$ pour $x \in [0;8]$

C'est une fonction facile à étudier : $f(x) = 8x^3 - x^4$ a pour dérivée : $f'(x) = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$

Cette dérivée est positive sur $[0;6]$ et négative sur $[6;8]$ ce qui donne immédiatement les variations de f sur $[0;8]$

Conclusion : l'aire du triangle AMH est maximale pour $x = 6$ cm et cette aire maximale est égale à $\dfrac{6\sqrt{8\times 6-6^2}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm^2